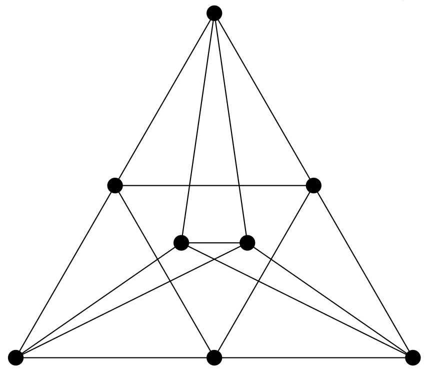
Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2005. március 31.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy páros gráfnak páratlan sok csúcsa van, akkor nincs benne Hamilton-kör!

2. Adjuk meg az összes olyan 100 csúcsú, egyszerű, összefüggő gráfot, amelyből bárhogyan hagyunk el egyetlen csúcsot (a rá illeszkedő élekkel együtt), a maradék gráfban van Euler-kör!

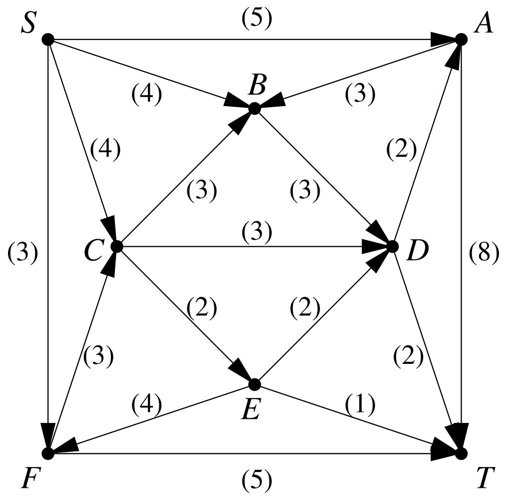
3. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát, $\chi(G)$-t!



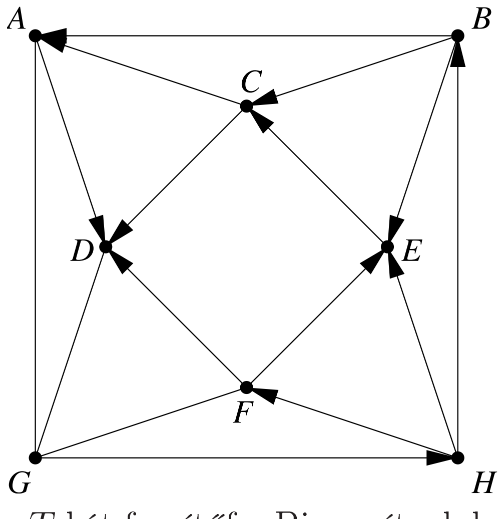
4. Legyen G_1 az a gráf, amit egy szabályos 2005-szögből úgy nyerünk, hogy behúzzuk az összes (2002 darab) egy adott csúcsból induló átlóját. Legyen G_2 az a gráf, amit egy szabályos 2005-szögből úgy nyerünk, hogy hozzáveszünk egy új csúcsot, amit a 2005-szög minden csúcsával összekötünk. Döntsük el a G_1 és a G_2 gráfról, hogy intervallumgráfok-e!

5. Mutassuk meg, hogy $\chi_e(G) + \nu(G) \leq e + 1$ teljesül minden e élű G gráfra, ahol $\chi_e(G)$ az élkromatikus számot, $\nu(G)$ a gráfbeli független élek maximális számát jelöli.

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot S-ből T-be és bizonyítsuk be róla, hogy maximális!



7. Az alábbi irányított gráfról tudjuk, hogy nincs benne irányított kör, ám a $G-A$, $G-D$ és $G-F$ élek irányítását „elfelejtettük” berajzolni. Adjuk meg ezeknek az éleknek az irányítását és mutassuk meg, hogy a kapott gráf valóban nem tartalmaz irányított kört!



8. Legyen az n csúcsú G összefüggő gráfban F és T két feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy F élei megszámozhatók f_1-től f_{n-1}-ig és T élei is megszámozhatók t_1-től t_{n-1}-ig úgy, hogy minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén $(E(F) \setminus \{f_i\}) \cup \{t_i\}$ szintén egy G-beli feszítőfa élhalmaza legyen!

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2005. május 5.

1. Határozzuk meg az x kétjegyű egész számot, ha tudjuk, hogy $34x+5$ utolsó két számjegye, valamint $17x+10$ utolsó két számjegye megegyezik.

2. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre

$$5^n \equiv 3^n + 8 \pmod{26}$$

teljesül!

3. Tekintsük azt a számtani sorozatot, amelynek első tagja 32, differenciája 51. (A sorozat tagjai tehát: $32, 83, 134, \ldots$) Milyen maradékot ad a sorozat első 32 tagjának szorzata 51-gyel osztva?

4. A H halmaz álljon a 900 összes pozitív osztójából. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet úgy, hogy $a, b \in H$ esetén $a * b$ meghatározásához először a-t és b-t (hagyományos értelemben) összeszorozzuk, majd az eredmény prímtényezős felbontásában minden prím kitevőjét helyettesítjük a 3-mal vett osztási maradékával. (Így például $36 * 60 = 10$.) Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e a $*$ műveletre nézve!

5. Létezik-e a pozitív valós számok szorzással vett csoportjának olyan részcsoportja, amely
a) izomorf a D_{10} diédercsoporttal;
b) izomorf a C_{10} ciklikus csoporttal (vagyis a 10 elemű ciklikus csoporttal);
c) izomorf az egész számok összeadással vett csoportjával?

6. Egy G csoport g elemére teljesül, hogy $o(g) = o(g^k)$ (ahol $o(g)$ a g elem rendjét jelöli és k pozitív egész). Mutassuk meg, hogy $o(g)$ és k relatív prímek!

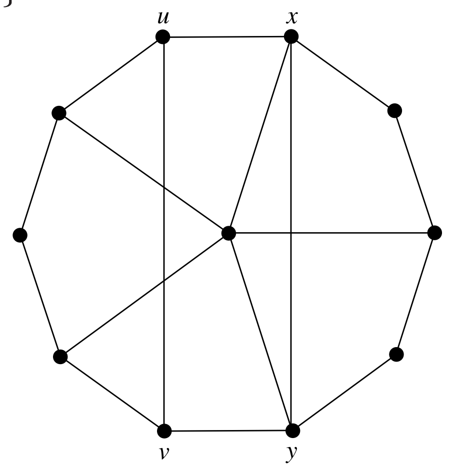
7. Egy kisváros úthálózatára teljesül, hogy bármely két utcát zárják le, továbbra is el lehet jutni bárhonnan bárhova. Bizonyítsuk be, hogy a főtérről a piactérre el lehet sétálni úgy, hogy közben minden utcán legföljebb egyszer megyünk végig és az út közben érintett utcák száma 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad!

8. A G egyszerű, összefüggő gráf szomszédossági mátrixát jelölje A. Mutassuk meg, hogy ha $\Delta(G)$ sajátértéke A-nak, akkor G-ben minden pont foka $\Delta(G)$. ($\Delta(G)$ a G-beli csúcsok maximális fokszámát jelöli.)

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok — 2005. május 9.

1. a) Van-e az alábbi gráfban olyan Hamilton-kör, ami nem tartalmazza az $\{u, v\}$ élt?

b) Van-e az alábbi gráfban olyan Hamilton-kör, ami nem tartalmazza az $\{x, y\}$ élt?

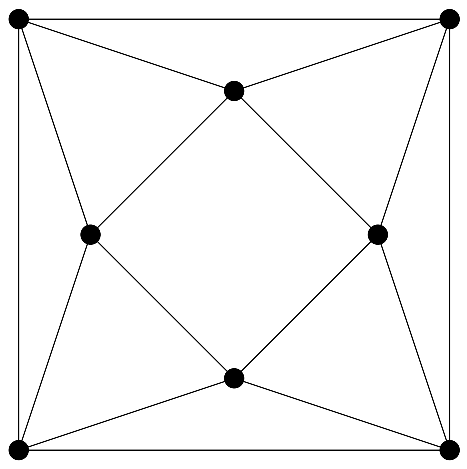


2. A tangótáncosok találkozóján 20 fiú és 20 lány vesz részt. Mindenki pontosan 12 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). A résztvevők a következőt játsszák: egy fiú kiválasztja egy lányismerősét és felkéri tangózni; az illető lány a tánc után kiválasztja egy másik fiúismerősét és felkéri tangózni, stb. A szabály tehát az, hogy akit legutóbb felkértek, az az ellenkező nemű ismerősei közül egy olyat kell felkérjen, akivel (ebben a játékban) még nem tangózott. (Akit felkérnek, az mindig el is fogadja a felkérést.) A társaság célja az, hogy végül mindenki elmondhassa magáról, hogy a játék során minden (ellenkező nemű) ismerősével pontosan egyszer tangózott. Mutassuk meg, hogy ez a cél megvalósítható!

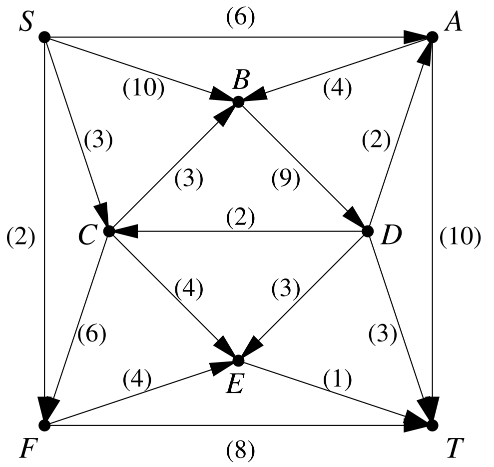
3. Mutassuk meg, hogy $\nu(G) \geq \dfrac{e}{\Delta(G)+1}$ teljesül minden e élű G egyszerű gráfra, ahol $\nu(G)$ független élek maximális számát, $\Delta(G)$ pedig a G-beli maximális fokszámot jelöli.

4. Legyen G olyan gráf, amelyben bizonyos élek irányítottak, mások irányítatlanok. Tegyük fel, hogy G-ben nincs csupa irányított élből álló irányított kör. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G irányítatlan élei megirányíthatók úgy, hogy a kapott irányított gráfban továbbra sincs irányított kör!

5. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát, $\chi(G)$-t!



6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot S-ből T-be és bizonyítsuk be róla, hogy maximális!



7. A $G(A, B; E)$ páros gráfban minden $u \in A$ és $v \in B$ csúcsokra $d(u) \geq d(v)$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy G-ben létezik A-t lefedő párosítás! ($d(x)$ az x pont fokát jelöli.)

8. A G gráf csúcsai legyenek a síknak azok a pontjai, amelyeknek mindkét koordinátája 1 és 100 közötti egész szám és a második koordinátájuk nagyobb az elsőnél. (Ugyanez képletben: $V(G) = \{(x, y) : 1 \leq x < y \leq 100\}$.) Az (x_1, y_1) csúcsot akkor kössük össze a tőle különböző (x_2, y_2) csúccsal, ha $y_1 \geq x_2$ és $y_2 \geq x_1$. Mutassuk meg, hogy G perfekt!

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok
2005. május 19.

1. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre $23n + 1$ osztható 117-tel!

2. Határozzuk meg a

$$51^{49^{48}}$$

szám utolsó két számjegyét (a tizes számrendszerben)!

3. Egy n pozitív egész számot akkor nevezünk *tökéletesnek*, ha megegyezik az önmagánál kisebb, pozitív osztóinak összegével. (Így például $6 = 1+2+3$ tökéletes szám.) Bizonyítsuk be, hogy ha egy p prímszámra $2^p - 1$ is prímszám, akkor a $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ szám tökéletes!

4. A H halmaz elemei legyenek a 3-mal osztva 1 maradékot adó egész számok. (Azaz: $H = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$.) Értelmezzük H-n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$a * b = a + b + 2.$$

(A $+$ jel a szokásos összeadást jelöli.) Mutassuk meg, hogy $*$ valóban művelet H-n és döntsük el, hogy H csoportot alkot-e $*$-ra nézve!

5. Legyen G csoport és legyen $H_G = \{g^2 : g \in G\}$ (vagyis H_G a G elemeinek négyzeteiből áll). Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak-e:
a) Ha G (tetszőleges) Abel-csoport, akkor H_G részcsoport G-ben.
b) Ha egy (tetszőleges) G csoportban H_G részcsoport, akkor G Abel-csoport.

6. Legyen $G_1 = (\mathbb{Q}, +)$ a racionális számok halmazán a (szokásos) összeadással vett csoport és legyen $G_2 = (\mathbb{Q}^+, \cdot)$ a pozitív racionális számok halmazán a (szokásos) szorzással vett csoport. Döntsük el, hogy G_1 izomorf-e G_2-vel!

7. Jelölje G azt a gráfot, amelyet egy 100 csúcsú teljes gráfból úgy kapunk, hogy elhagyjuk egy teljes párosításának az éleit. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre teljesül, hogy a G gráf k-szorosan összefüggő!

8. A G egyszerű, páros gráf szomszédossági mátrixát jelölje A. Mutassuk meg, hogy ha egy λ szám sajátértéke A-nak, akkor $-\lambda$ is sajátértéke A-nak!