Bevezetés a Számításelméletbe II.
I. Zárthelyi 2004 március 25.

1. Létezik-e olyan lépéssorozat a huszárral a 8×8-as sakktáblán, melynek során az összes lehetséges lépést pontosan egyszer megtesszük, de csakis az egyik irányban? (Vagyis, ha X és Y két olyan mező, hogy a huszár léphet egyikről a másikra [ilyen pl. a sakktábla szokásos jelöléseivel A1 és B3], akkor a kívánt lépéssorozatban az $X \to Y$ és $Y \to X$ lépések közül az egyiknek elő kell fordulnia, de mindkettő nem szerepelhet.)

2. Egy ünnepi vacsorára 49 vendéget hívtak. Minden vendég legalább 24 másik vendéget ismer. Mindannyian ismerik továbbá a házigazdát. (Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel.) Bizonyítsuk be, hogy az 50 ember (tehát a házigazda és 49 vendége) leültethető egy 50 személyes kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a két mellette ülőt.

3. Kirándulásra készülődve n résztvevőnek n csomagot kell egymás között szétosztania úgy, hogy mindegyikük egy-egy csomagot hozzon a maga hátizsákjában. Minden csomagra igaz, hogy egy kivételével az összes hátizsákba belerakható. Azt is tudjuk, hogy mind az n hátizsákhoz van olyan csomag, ami abban elfér. Mindezek alapján bizonyítsuk be, hogy a kívánt elosztás lehetséges, vagyis az n csomag elhelyezhető az n hátizsákban úgy, hogy mindegyikbe egy kerüljön.

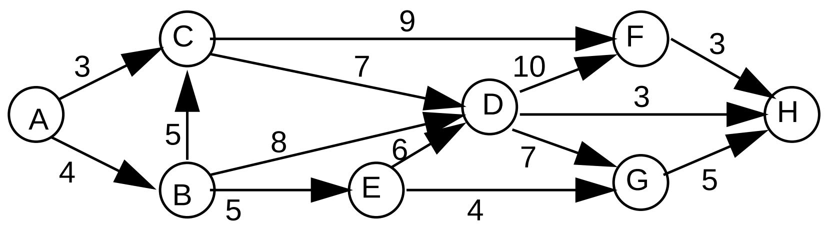
4. Egy 100 csúcsú F páros gráf minden pontjának fokszáma 20. Állapítsuk meg az éleket lefogó minimális ponthalmaz méretét, azaz a $\tau(G)$ értéket!

5. A G gráf csúcsai legyenek az $u_1, u_2, \ldots, u_{2003}, v_1, v_2, \ldots, v_{2004}$ pontok. G feszített részgráfja az u_i pontokon egy 2003, a v_i pontokon pedig egy 2004 hosszúságú kör. Ezen kívül u_i és v_j össze van kötve egymással minden lehetséges i, j értékpár esetén. Mennyi a G gráf kromatikus száma?

6. Jelölje D_9 azt a 18 élű gráfot, amit úgy kaphatunk egy 9 hosszúságú körből, hogy a körben másodszomszédos pontokat is összekötjük. Állapítsuk meg, hogy D_9 perfekt gráf-e!

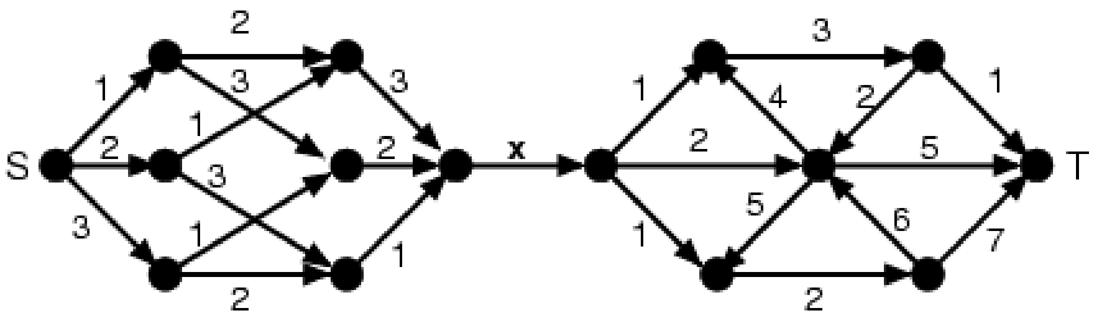
7. Egy 49 csúcsú gráfnak 1030 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a kromatikus száma legalább 8, és hogy 8 lehet is.

8. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges idő hosszát és határozzuk meg a kritikus utakat az alábbi PERT diagramon!



Bevezetés a Számításelméletbe II.
2. Zárthelyi
2004. április 29.

1. Adjuk meg a maximális folyam értékét S-ből T-be az $x \geq 0$ valós paraméter függvényében az alábbi hálózatban.



2. Egy hálózatban minden kapacitásérték 18, 21, vagy 30. Bizonyítsuk be, hogy megadható olyan maximális értékű folyam az adott hálózatban, ami minden egyes élen hárommal osztható egész értéket vesz fel.

3. Bizonyítsuk be, hogy a
$$\frac{21n+4}{14n+3}$$
tört semmilyen nemnegatív egész n-re sem egyszerűsíthető.

4. Mennyi az 1993^{1993} szám 2004-gyel való osztáskor keletkező maradéka?

5. Oldjuk meg az alábbi kongruenciát!
$$170\,x \equiv 78 \pmod{2006}$$

6. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amire az S_n szimmetrikus csoportnak van D_4-gyel, vagyis a negyedfokú diédercsoporttal izomorf részcsoportja?

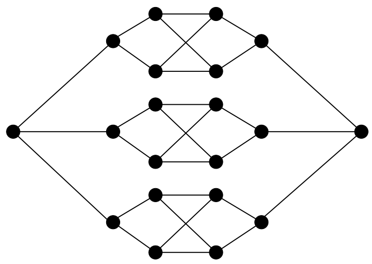
7. Legyen H és K egy G csoport két véges részcsoportja, melyekre teljesül, hogy
$$\text{lnko}(|H|, |K|) = 1,$$
vagyis H és K rendje relatív prímek. Mutassuk meg, hogy ekkor $H \cap K = \{e\}$, ahol e a G csoport egységeleme.

8. Legyen G egy n-elemű csoport (n pozitív egész szám) és L ennek olyan részcsoportja, melynek G-beli indexe $\frac{n}{5}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges $h \in L$ elemre fennáll, hogy $h^{10} = e$, ahol e a G csoport egységeleme.

Bevezetés a számításelméletbe II.
1. Pótzárthelyi 2004. május 3.

1. Milyen n pozitív egész számok esetén található Euler-kör az n csúcsú teljes gráf élgráfjának komplementerében?

2. Állapítsuk meg, hogy tartalmaz-e Hamilton-kört az ábrán látható gráf!



3. Legyen G egy 8 csúcsú 13 élet tartalmazó síkbarajzolható gráf. Bizonyítsuk be, hogy G kromatikus száma nagyobb, mint 2.

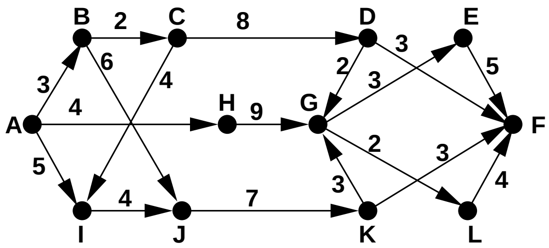
4. Jelölje G azt a gráfot, amit a K_{2004} teljes gráfból kapunk, ha elhagyunk belőle egy teljes párosítást. Határozzuk meg a G gráf kromatikus számát!

5. Tíz család minden egyes tagja felírt tíz-tíz könyvcímet egy-egy papírlapra. Tudjuk, hogy ha két ember ugyanabba a családba tartozik, akkor e tizes listáik diszjunktak. Egy nagy könyvesbolt vezetői szeretnék a boltot avval reklámozni, hogy a tíz család minden tagjának ajándékoznak egy olyan könyvet, ami az illető listáján szerepel. A boltban az összes felírt könyv megvan. A vezetőség azt is szeretné, ha egy-egy könyvből legfeljebb egyetlen kötetet adnának oda ajándékul. Bizonyítsuk be, hogy a leírt feltételek mellett ez megvalósítható, vagyis kaphat mindenki egy könyvet a listájáról úgy, hogy semelyik könyvből sem kapnak egynél többen.

6. Egy 10×10-es táblázatból valaki kiválasztott 30 mezőt úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan három kiválasztott mező szerepeljen. Szeretnénk 10 fehér, 10 fekete és 10 piros gombot elhelyezni a 30 kiválasztott mezőn úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy fehér, egy fekete és egy piros gomb legyen. Bizonyítsuk be, hogy ez a megadott feltételek mellett mindig lehetséges.

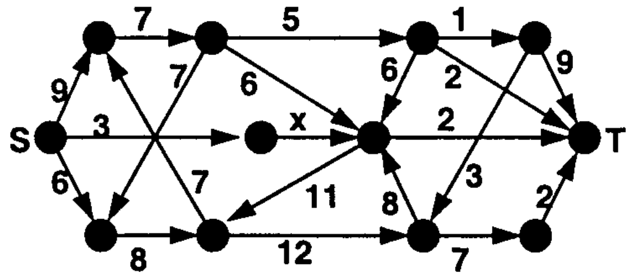
7. Egy 30 fős társaságban bármely 4 ember között van 2, akik kezet fogtak egymással. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a társaság tagjai között legalább 135 kézfogás történt.

8. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges idő hosszát és határozzuk meg a kritikus utakat az alábbi PERT diagramon!



Bevezetés a számításelméletbe II.
2. Pótzárthelyi 2004. május 10.

1. Adjuk meg a maximális folyam értékét S-ből T-be a $9 \le x \le 10$ feltételeknek eleget tevő x paraméter függvényében az alábbi hálózatban.



2. Mennyi a $K_{r,s}$, egyik színosztályában r, másikban s pontot tartalmazó teljes páros gráf $\kappa(K_{r,s})$ csúcsösszefüggőségi számának értéke?

3. Egy n pozitív egész számról tudjuk, hogy osztóinak száma p, ahol p prímszám. Állapítsuk meg, hogy az ezen p osztóból alkotható, összesen $\binom{p}{2}$ számpár közül hány lesz relatív prím.

4. Oldjuk meg az alábbi kongruenciát (vagyis állapítsuk meg az azt kielégítő x(-ek) 18-cal adott maradékát)!

$$400\,x \equiv 14 \pmod{18}$$

5. Adjuk meg a $\varphi(1000)$ és a $\varphi(999)$ számok legnagyobb közös osztóját!

6. Állapítsuk meg, hogy tartalmaz-e az S_5 szimmetrikus csoport a 7-elemű ciklikus csoporttal izomorf részcsoportot.

7. Legyen G egy n elemű csoport (n pozitív egész), m pedig n-hez relatív prím pozitív egész szám. A G csoport valamely g eleméről azt tudjuk, hogy $g^m = e$, ahol e a G-beli egységelem. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $g = e$.

8. Mutassuk meg, hogy nemkommutatív csoport kommutatív részcsoportja nem feltétlenül normális részcsoport.