Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2003. március 27.

1. A G egyszerű gráfnak $2k+1$ csúcsa van. Az egyik csúcs foka k, az összes többi csúcs foka legalább $k+1$. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-kör!

2. Egy gráfban bolyongásnak nevezünk egy olyan élsorozatot, amely minden élen legfeljebb egyszer megy át (de egy ponton többször is átmehet). Hány élből áll a lehető leghosszabb bolyongás

a) K_9-ben, a 9 csúcsú teljes gráfban; b) K_{10}-ben, a 10 csúcsú teljes gráfban?

3. Határozzuk meg az összes olyan 10 csúcsú egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 2$, de bárhogy húzunk be G-be egy új élet (két nemszomszédos csúcsa közé), a kapott G' gráfra $\chi(G') > 2$!

4. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8-as sakktábla mezői és két mező akkor legyen szomszédos G-ben, ha egy lóugrásra vannak egymástól. (A sakkban a ló egy lépése abból áll, hogy két mezőt halad függőleges, vagy vízszintes irányban, utána még egy mezőt mozdul az eddigi mozgásirányára merőlegesen.)

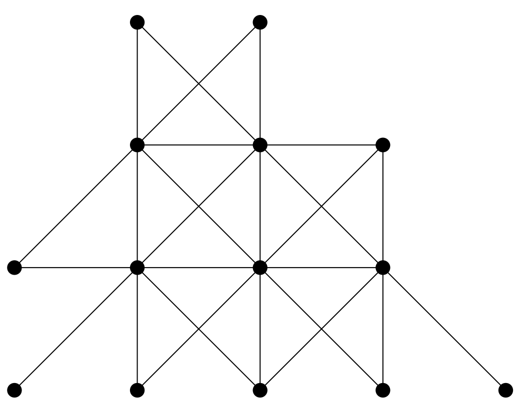
a) Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t!

b) Bizonyítsuk be, hogy G perfekt!

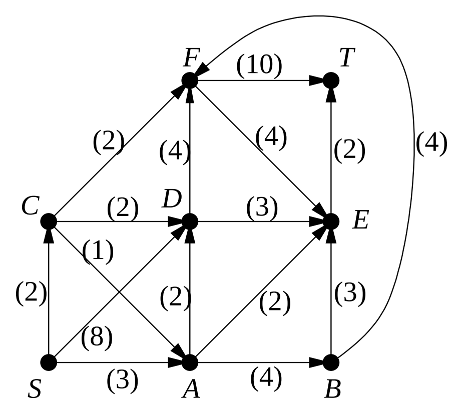
5. A G páros, egyszerű gráfban minden pont foka r ($r \geq 2$). Osszuk fel G egy tetszőleges élét egy ponttal. Mennyi a keletkezett G' gráf $\chi_e(G')$ élkromatikus száma? (Az él ponttal való felosztása azt jelenti, hogy az élet kitöröljük a gráfból, majd hozzáveszünk a gráfhoz egy új pontot és összekötjük a kitörölt él két végpontjával.)

6. A G irányított gráf csúcsai legyenek egy n elemű halmaz összes részhalmazai. Az A részhalmazból akkor vezessen egy irányított él a B részhalmazba, ha $A \subset B$, de $A \neq B$. Az A-ból B-be vezető élhez rendeljük hozzá az $|A| + |B|$ értéket. Határozzuk meg az így kapott PERT feladatban a szükséges időt és a kritikus tevékenységeket!

7. Határozzuk meg az alábbi gráfban a független élek maximális számát!



8. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be) és bizonyítsuk is be róla, hogy maximális!



Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2003. április 30.

1. Határozzuk meg 2003^{2003} utolsó három számjegyét!

2. Milyen maradékot adhat egy egész szám 92-vel osztva, ha az 54-szerese 24 maradékot ad 92-vel osztva?

3. Legyen n páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív osztóinak átlaga egész szám!

4. Legyen $H = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ és értelmezzük a H halmazon a $*$ műveletet az alábbi műveleti tábla szerint:

$*$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	d	g	e	a	c	h	b	f
b	g	d	h	b	f	e	a	c
c	e	h	a	c	d	b	f	g
d	a	b	c	d	e	f	g	h
e	c	f	d	e	a	g	h	b
f	h	e	b	f	g	a	c	d
g	b	a	f	g	h	c	d	e
h	f	c	g	h	b	d	e	a

(A táblázat szerint tehát például $a * c = e$ és $g * f = c$.)

a) Bizonyítsuk be, hogy a H halmaz csoportot alkot a $*$ műveletre nézve, ha azt már tudjuk, hogy $*$ asszociatív! (Az asszociativitást tehát nem kell ellenőrizni.)

b) Ciklikus csoport-e $(H, *)$?

5. Van-e olyan 20 elemű csoport, amelyben

a) van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem;

b) van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?

6. A G véges, Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. (A csoport műveletét tehát most szorzásnak neveztük.) Bizonyítsuk be, hogy eredményül G-nek olyan elemét kapjuk, amelynek a rendje 1 vagy 2!

7. Legyenek A, B és C diszjunkt, r elemű halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha A, B és C közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A G gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt” r csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k-szorosan összefüggő!

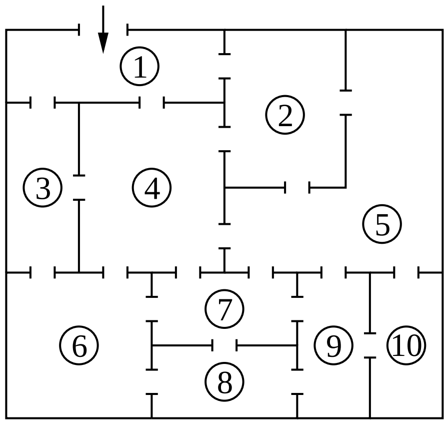
8. A $G(A, B; E)$ páros gráf olyan, hogy minden A-beli pont foka r és minden B-beli pont foka s. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{rs}$ sajátértéke G szomszédossági mátrixának!

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok
2003. május 13.

1. Legyenek egy $4k$ csúcsú kör pontjai (a körüljárás sorrendjében) $v_1, v_2, \ldots, v_{4k}$. Vegyünk fel két új pontot, amelyek közül az egyiket a $v_4, v_8, v_{12}, \ldots, v_{4k}$ csúcsokkal, a másikat a $v_2, v_6, v_{10}, \ldots, v_{4k-2}$ csúcsokkal kössük össze. Jelölje az így kapott ($4k+2$ csúcsú) gráfot G.

a) Van-e G-ben Hamilton-kör? b) Van-e G-ben Hamilton-út?

2. Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. A király minden nap a nyíllal jelölt bejáraton lép be a palotába, majd a trónterembe megy. A fejébe veszi, hogy ezt úgy szeretné megtenni, hogy közben minden ajtón pontosan egyszer megy át; de ez sosem sikerül neki. Az udvari bölcs javaslatára ezért befalaztatja az egyik ajtót. (Az ábra az eredeti állapotot mutatja.) Ezután a király már tud úgy sétálni a trónterembe, hogy minden ajtón egyszer megy át. Melyik a trónterem és melyik ajtó befalazását javasolta a bölcs?



3. Határozzuk meg az összes olyan n csúcsú, egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 3$, de bárhogy hagyunk el G-ből egy csúcsot (az éleivel együtt), a kapott G' gráfra $\chi(G') = 2$!

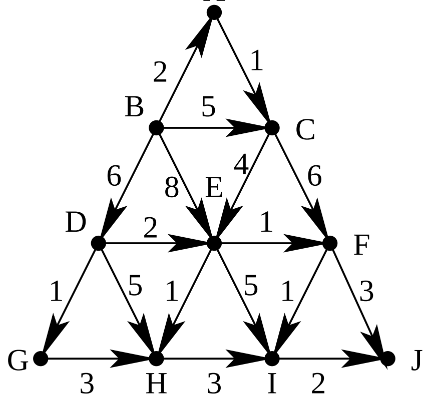
4. Egy szabályos nyolcszögbe húzzuk be az összes legrövidebb átlóját. Mennyi az így kapott (8 csúcsú, 16 élű) gráf élkromatikus száma?

5. A $2k+1$ pontú, egyszerű G gráfban minden pont foka legalább $k+1$. Mennyi $\nu(G)$, a független élek maximális számának értéke?

6. A G irányított gráf csúcsai legyenek az $1, 2, \ldots, 2k$ egész számok. Az a számból akkor vezessen egy irányított él b-be, ha $a < b$. Az a-ból b-be vezető él kapacitása legyen 1, ha a páratlan és legyen 2, ha a páros. Mennyi az így kapott hálózatban az 1-ből $2k$-ba vezető maximális folyam értéke?

7. Legyen $H = \{1, 2, \ldots, 2003\}$. Legyen x az a maximális szám, ahány H-beli szám kiválasztható úgy, hogy bármelyik két kiválasztott szám összegének utolsó számjegye sohasem 7. Legyen y az a minimális szám, ahány H-beli számpár kiválasztásával elérhető, hogy minden H-beli szám bekerül legalább egy számpárba, és mindegyik számpár tagjai összegének utolsó számjegye 7. Bizonyítsuk be, hogy $x = y$.

8. Mennyi a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő és mik a kritikus részfeladatok az alábbi PERT diagramon?



Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok
2003. május 15.

1. Milyen maradékot adhat egy szám 101-gyel osztva, ha az 59-szerese 1 maradékot ad 101-gyel osztva?

2. Milyen maradékot ad 59^{99} 101-gyel osztva?

3. Oldjuk meg a

$$\varphi(5n) + \varphi(3n) = 7\varphi(n)$$

egyenletet (vagyis határozzuk meg az összes olyan n pozitív egészt, amelyre az egyenlet fennáll)!

4. A H halmaz álljon az összes olyan rendezett számpárból, amelynek az első tagja egész szám, a második tagja 0 vagy 1. (Azaz: $H = \{(a,b)|a \in \mathbb{Z}, b \in \{0,1\}\}$.) Értelmezzük H-n a $\oplus$ műveletet a következőképpen:

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, (b_1 + b_2) \bmod 2).$$

(Azaz: a számpárokat tagonként összeadjuk és az eredmény második tagjának 2-es maradékát vesszük. Például: $(7,1) \oplus (12,1) = (19,0)$.)

a) Bizonyítsuk be, hogy H csoportot alkot a $\oplus$ műveletre nézve!

b) Milyen rendű elemek fordulnak elő H-ban?

5. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

elem rendjét az S_8 szimmetrikus csoportban!

6. A 100 rendű G csoportban létezik egy olyan $g \in G$ elem, amelyre $g^{20} \neq e$ és $g^{50} \neq e$ (ahol e a csoport egységelemét jelöli). Bizonyítsuk be, hogy G Abel-csoport!

7. Legföljebb hány élet lehet elhagyni a 10 csúcsú teljes gráfból úgy, hogy a maradék gráf 4-szeresen élösszefüggő legyen?

8. Legyen G egy $n \geq 2$ csúcsú (irányítatlan) gráf és G szomszédossági mátrixát jelölje A. Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor összefüggő, ha az $A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ mátrix minden eleme pozitív!