Bevezetés a számításelméletbe II. Zárthelyi feladatok 2002. március 28.

1. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű, összefüggő és reguláris gráf élgráfjában mindig van Euler-kör. (Emlékeztető: Egy gráfot akkor mondunk regulárisnak, ha minden fokszáma egyenlő.)

2. Legyenek $m \geq 2$ és $n \geq 3$ egész számok, melyekre $n \geq m$. Bizonyítsuk be, hogy az n csúcsú és m osztályú Turán gráf akkor és csak akkor nem tartalmaz Hamilton-kört, ha $m = 2$ és n páratlan.

3. Egy G gráf csúcsai legyenek az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok összes permutációi. Két csúcs akkor legyen összekötve G-ben, ha a megfelelő két permutáció egyetlen (nem feltétlenül szomszédos elemekből álló) elempár felcserélésével egymásba vihető. Mutassuk meg, hogy az így megadott G gráf tartalmaz teljes párosítást.

4. Legyen G a 3 osztályú 12 pontú Turán-gráf. Állapítsuk meg $\tau(G)$ értékét!

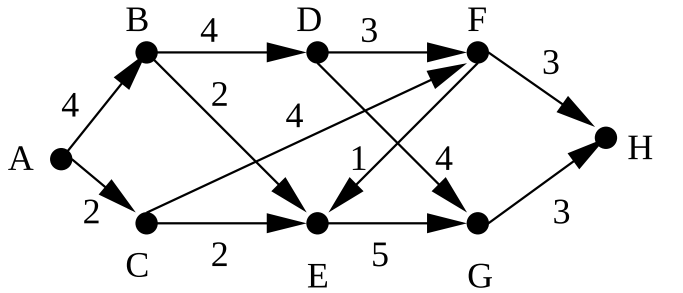
5. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú G egyszerű gráfra fennáll, hogy

$$\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}.$$

6. Legyen G a következőképpen megadott gráf: $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$ és $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, ahol $E_1 = \{\{i,j\} : 1 \leq i < j \leq 5\}, E_2 = \{\{i,j\} : 6 \leq i < j \leq 10\}, E_3 = \{\{i,j\} : j = i + 5\}$. (Szavakkal megadva: G két pontdiszjunkt K_5-ből áll, amiket egy teljes párosítás köt össze.) Állapítsuk meg G élkromatikus számának értékét!

7. Adott a síkon néhány körvonal, ezekhez rendeljük a következő G gráfot. G csúcsai feleljenek meg egy-egy megadott körvonalnak, és kettő akkor legyen összekötve, ha a két megfelelő körvonal egyike teljesen a másik belsejében halad. Bizonyítsuk be, hogy az így megadott G gráf perfekt.

8. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges idő hosszát és határozzuk meg a kritikus utakat az alábbi PERT diagramon!



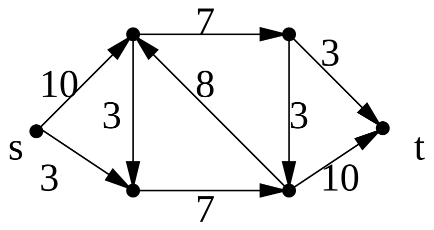
A feladatok sorrendje nem jelent nehézségi sorrendet. Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 32. A további osztályzatok ponthatárai egyenletesen (12 pontonként) helyezkednek el, de a vizsgára nem osztályzat, hanem az elért pontszám "megy tovább".

Puszta (indoklás nélküli) eredményközlésért nem jár pont.

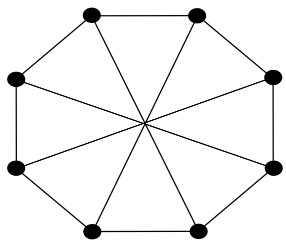
A dolgozatra kérjük *jól olvashatóan* felírni a következő adatokat: név, neptun-kód, tankör száma, gyakorlatvezető neve.

Bevezetés a számításelméletbe II. Zárthelyi feladatok 2002. május 2.

1. Adjunk meg egy maximális folyamot és állapítsuk meg annak értékét az alábbi hálózatban!



2. Legyen G az ábrán látható nyolc csúcsú gráf. Bizonyítsuk be, hogy G háromszorosan összefüggő, de négyszeresen már nem.



3. Oldjuk meg az alábbi kongruenciát (vagyis állapítsuk meg az azt kielégítő x(-ek) 90-nel adott maradékát)!
$$1000\,x \equiv 80 \pmod{90}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $h_1, \dots, h_k$ pozitív egészekre és p prímszámra fennáll, hogy
$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_k)^p \equiv h_1^p + h_2^p + \ldots + h_k^p \pmod{p}.$$

5. Mutassuk meg, hogy $61! + 1$ osztható 71-gyel. (Emlékeztető: Számológép a zárthelyi feladatok megoldásához nem használható; jelen feladatnak is csak számelméleti érvelést tartalmazó, "fejben ellenőrizhető" megoldását fogadjuk el.)

6. Hány különböző részcsoportja van a C_{2002} ciklikus csoportnak?

7. Legyenek H és K egy G csoport olyan részcsoportjai, melyekre $(|H|, |K|) = 1$ (vagyis a H és K részcsoport rendjének legnagyobb közös osztója 1). Mutassuk meg, hogy ekkor $H \cap K = \{e\}$, ahol e a G csoport egységeleme.

8. Legyen H a G csoport tetszőleges, N pedig a G csoport normális részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $H \cap N$ normális részcsoportja H-nak.

A feladatok sorrendje nem jelent nehézségi sorrendet. Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 32. A további osztályzatok ponthatárai egyenletesen (12 pontonként) helyezkednek el, de a vizsgára nem osztályzat, hanem az elért pontszám "megy tovább".

Puszta (indoklás nélküli) eredményközlésért nem jár pont.

A dolgozatra kérjük *jól olvashatóan* felírni a következő adatokat: név, neptun-kód, tankör száma, gyakorlatvezető neve.

Bevezetés a számításelméletbe II. Pótzárthelyi feladatok (I.) 2002. május 10.

1. Igaz-e, hogy ha egy $G = (A, B, E)$ páros gráfnak van Euler-köre, akkor szükségképpen teljesül, hogy $|A| = |B|$?

2. Legyen G az a gráf, amit úgy kapunk, hogy a $K_{n,n}$ teljes páros gráfból elhagyunk egy teljes párosítást. Mutassuk meg, hogy ha $n > 2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

3. Tekintsük az összes létező olyan légijáratot, amely közvetlen összeköttetést biztosít egy amerikai és egy európai város között. Tegyük fel, hogy k a legnagyobb olyan pozitív egész, amire létezik k különböző európai város, $E_1, \dots, E_k$, és k különböző amerikai város, $A_1, \dots, A_k$, úgy, hogy minden $1 \le i \le k$-ra E_i és A_i között van közvetlen repülőjárat. Bizonyítsuk be, hogy ekkor biztosan van az előbbi $2k$ város között k olyan, amelyekre igaz, hogy az összes létező Európa és Amerika közötti közvetlen légijáratnak az egyik végpontja közöttük van.

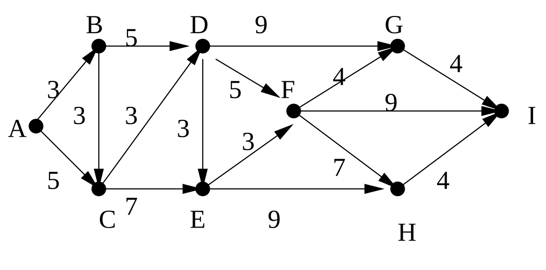
4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n csúcsú véges egyszerű G gráfra fennáll, hogy
$$\alpha(G) \ge n - 2\nu(G).$$

5. Legyen G 3-reguláris véges egyszerű gráf, melynek $\chi_e(G)$ élkromatikus száma 4. Mutassuk meg, hogy G nem tartalmaz Hamilton-kört.

6. Legyen G_n az az n csúcsú gráf, melynek csúcsai az $1, 2, \dots, n$ természetes számok, és kettő pontosan akkor van összekötve, ha egyik sem osztója a másiknak. Mutassuk meg, hogy G_n (tetszőleges n természetes szám esetén) perfekt gráf.

7. Legyen T egy lehető legtöbb élet tartalmazó n csúcsú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz $r+1$ csúcsú teljes részgráfot. Mutassuk meg, hogy ha T-ben van Euler-kör, akkor r osztója n-nek.

8. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges idő hosszát és határozzuk meg a kritikus utakat az alábbi PERT diagramon!



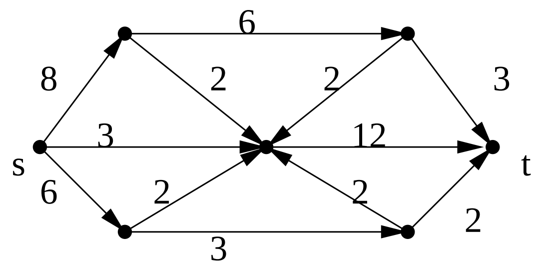
A feladatok sorrendje nem jelent nehézségi sorrendet. Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 32. A további osztályzatok ponthatárai egyenletesen (12 pontonként) helyezkednek el, de a vizsgára nem osztályzat, hanem az elért pontszám "megy tovább".

Puszta (indoklás nélküli) eredményközlésért nem jár pont.

A dolgozatra kérjük *jól olvashatóan* felírni a következő adatokat: név, neptun-kód, tankör száma, gyakorlatvezető neve.

Bevezetés a számításelméletbe II. Pótzárthelyi feladatok 2002. május 16.

1. Adjunk meg egy maximális folyamot és állapítsuk meg annak értékét az alábbi hálózatban!



2. Legyen G reguláris páros gráf, melyről tudjuk, hogy összefüggő és legalább három csúcsa van. Mutassuk meg, hogy ekkor G 2-szeresen is összefüggő.

3. Oldjuk meg az alábbi kongruenciát (vagyis állapítsuk meg az azt kielégítő x(-ek) 49-cel adott maradékát)!
$$77\,x \equiv 21 \pmod{49}$$

4. Mutassuk meg, hogy $2002^{2002} + 1$ osztható 17-tel.

5. Legyen $k \geq 2$ és jelölje $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ azt a legnagyobb pozitív egészt, amely az a_i $(1 \leq i \leq k)$ számok mindegyikét osztja, $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ pedig azt a legkisebb pozitív egészt, amely az a_i $(1 \leq i \leq k)$ számok mindegyikével osztható. Mutassuk meg, hogy
$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot [a_1, a_2, \ldots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$$
akkor és csak akkor áll fönn minden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pozitív egészekből álló szám k-asra, ha $k = 2$.

6. Legyenek H és K egy G csoport részcsoportjai. Bizonyítsuk be, hogy ha G-nek a részhalmazszorzással (komplexusszorzással) létrejövő HK részhalmaza is részcsoportja G-nek, akkor $HK = KH$.

7. Legyen G egy csoport és a ennek tetszőleges eleme. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan ϕ homomorfizmus létezik, amely az egész számok additív csoportját képezi le G-be úgy, hogy $\phi(1) = a$. Mi lesz $Ker\phi$ erre a leképezésre?

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább két elemet tartalmazó G csoportnak nincsen valódi részcsoportja (tehát olyan részcsoportja, mely egynél több, de $|G|$-nél kevesebb elemet tartalmaz), akkor G prímrendű ciklikus csoport.

A feladatok sorrendje nem jelent nehézségi sorrendet. Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges eléréséhez szükséges minimális pontszám 32. A további osztályzatok ponthatárai egyenletesen (12 pontonként) helyezkednek el, de a vizsgára nem osztályzat, hanem az elért pontszám "megy tovább".

Puszta (indoklás nélküli) eredményközlésért nem jár pont.

A dolgozatra kérjük *jól olvashatóan* felírni a következő adatokat: név, neptun-kód, tankör száma, gyakorlatvezető neve.