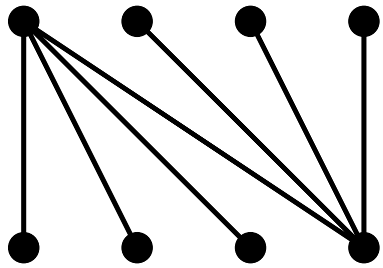
Bevezetés a számításelméletbe II.
GyakIV 2004. május 24.

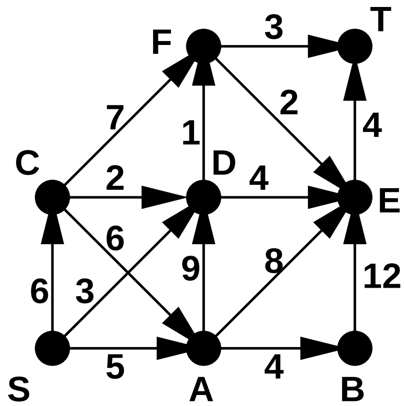
1. Mutassuk meg, hogy ha $n \geq 8$, akkor az n csúcsú teljes gráf élgráfjának komplementerében van Hamilton-kör.

2. Állapítsuk meg, hogy minimálisan hány további élet kell behúzni az ábrán látható páros gráfba ahhoz, hogy tartalmazzon teljes párosítást.



3. Legyen G egy 2004 csúcsú gráf, amiről tudjuk, hogy kromatikus száma 167. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) \leq 1992$, és adjunk is meg olyan G_0 gráfot, amire $\tau(G_0) = 1992$ miközben teljesíti a fenti feltételeket.

4. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges idő hosszát és határozzuk meg a kritikus utakat az alábbi PERT diagramon!



5. Egy apa és gyermeke születési évszámának legnagyobb közös osztója 30. Bizonyítsuk be, hogy az apa 2004-ben már elmúlt 50 éves.

6. Oldjuk meg az alábbi kongruenciát (vagyis állapítsuk meg az azt kielégítő x(-ek) 200-zal adott maradékát)!
$$21\,x \equiv 7 \pmod{200}$$

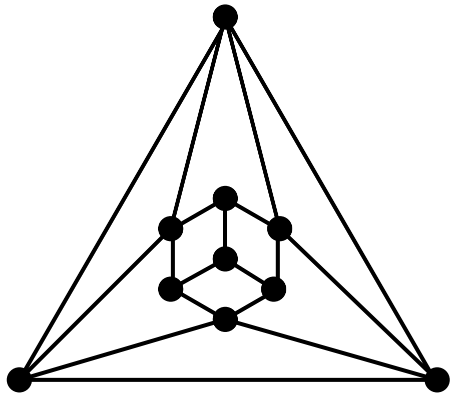
7. Mutassuk meg, hogy az S_n szimmetrikus csoport generálható olyan elemekkel, melyek mindegyike másodrendű.

8. A G csoport H részcsoportjának G-beli indexe 3. Tudjuk még, hogy G-nek létezik olyan, a H részcsoporthoz nem tartozó g eleme, amire $gH = Hg$. Bizonyítsuk be, hogy H normális részcsoportja G-nek!

Bevezetés a számításelméletbe II.
GyakIV 2004. június 2.

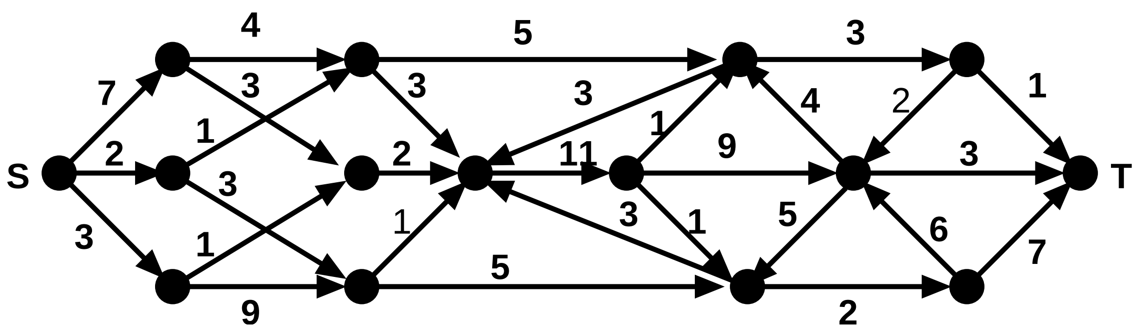
1. Legyen G az a gráf, melynek csúcsai egy 8×8-as sakktábla mezői, és két csúcsa pontosan akkor van összekötve éllel, ha a megfelelő két mező egy bástyával elérhető egymásból. (Utóbbi pontosan azt jelenti, hogy a két mező egy sorban, vagy egy oszlopban van.) Állapítsuk meg, hogy van-e G-ben Euler-kör.

2. Állapítsuk meg, hogy mennyi a kromatikus száma az ábrán látható gráfnak.



3. Legyen G egy 200 csúcsú, háromszögmentes gráf, amiről tudjuk, hogy éleinek száma 10000. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz teljes párosítást.

4. Adjuk meg a maximális folyam értékét S-ből T-be az alábbi hálózatban!



5. Az n pozitív egész számról a következőket tudjuk. Ha egy p prímszám osztja n-et, akkor p^2 is osztja n-et. Másrészről, semmilyen prímszám hetedik hatványa sem osztója n-nek. Még azt is tudjuk, hogy n összes osztóinak száma 2-nek egész kitevős hatványa. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\sqrt[3]{n}$ egész szám.

6. Oldjuk meg az alábbi kongruenciát (vagyis állapítsuk meg az azt kielégítő x(-ek) 115-tel adott maradékát)!
$$276\,x \equiv 51 \pmod{115}$$

7. Legyen G csoport, melyre $|G| = 2004$. Igaz-e, hogy G másodrendű elemei feltétlenül részcsoportját alkotják G-nek?

8. Legyen G legfeljebb 4000 elemet tartalmazó csoport, $g_1, g_2 \in G$ pedig olyan elemei, amikre $o(g_1) = 167$ és $o(g_2) = 12$. Adjuk meg G elemszámát!