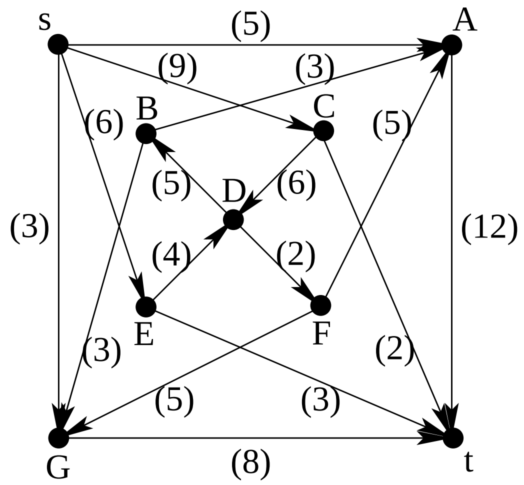
Bevezetés a számításelméletbe II.
GyakIV feladatok
2003. május 22.

1. Az n csúcsú G egyszerű gráfban minden él legföljebb $n-4$ további éllel szomszédos. (Két él akkor szomszédos, ha az egyik végpontjuk közös.) Bizonyítsuk be, hogy G komplementerében van Hamilton-kör!

2. Egy G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmaz. Egy $x \in V(G)$ csúcs akkor legyen szomszédos az $y \in V(G)$ csúccsal, ha $x \neq y$ és $100 \leq x \cdot y \leq 400$. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét!

3. A $G(A, B; E)$ páros gráfban minden $X \subseteq A$ részhalmazra teljesül, hogy $|N(X)| \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq |A| - 1$ (ahol $\nu(G)$ a G-beli független élek maximális számát jelöli)!

4. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (s-ből t-be) és mutassuk is meg róla, hogy maximális!



5. Határozzuk meg

$$17^{17^{17}} - 17^{17} + 17$$

utolsó két számjegyét!

6. Milyen maradékot adhat egy x egész szám 46-tal osztva, ha $40x-33$ és $11-20x$ ugyanazt a maradékot adják 46-tal osztva?

7. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább 2 elemű) véges csoportban van olyan elem, amelynek a rendje prímszám!

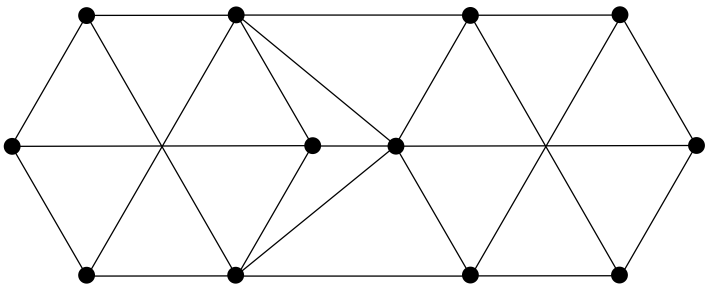
8. Legyen G 101 csúcsú, 3-szorosan összefüggő (irányítatlan) gráf és jelölje G szomszédossági mátrixát A. Bizonyítsuk be, hogy az $A + A^2 + \ldots + A^{34}$ mátrix minden eleme pozitív!

Bevezetés a számításelméletbe II.
GyakIV feladatok
2003. június 5.

1. Egy x egész szám ugyanannyi maradékot ad 98-cal osztva, mint $68 - 23x$. Mi lehet ez a maradék?

2. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egészt, amelyre $n^{61} \equiv n \pmod{77}$.

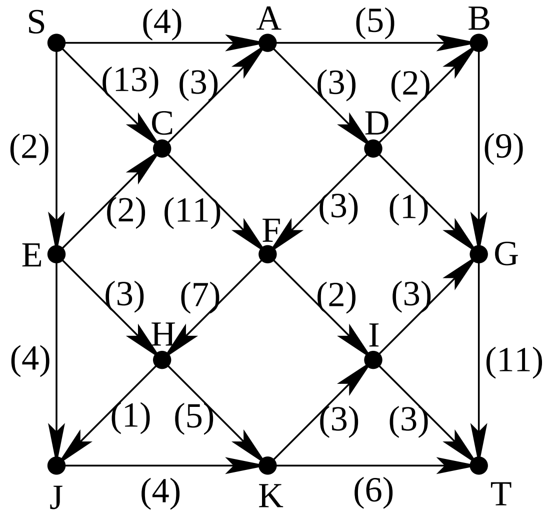
3. Határozzuk meg az alábbi gráfban a lefogó pontok minimális számát!



4. Egy szabályos kilencszögbe húzzuk be az összes legrövidebb átlóját; most húzzunk be még egyetlen további átlót a kilencszög második legrövidebb átlói közül. (A második legrövidebb átló tehát azt jelenti, hogy két olyan csúcsot kötünk össze, amelyek között a kilencszög két további csúcsa található a kilencszög élei mentén lépve.) Döntsük el, hogy az így kapott (9 csúcsú, 19 élű) gráf perfekt-e!

5. Bizonyítsuk be, hogy minden 3-szorosan összefüggő gráfban van páros hosszúságú kör!

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be) és mutassuk is meg róla, hogy maximális!



7. A Sup-Air légitársaság 100 járatot üzemeltet a Föld különböző városai között. Tudjuk, hogy minden városból néggyel osztható számú (esetleg 0) járat indul más városokba. Gazdasági okok miatt a Sup-Air kénytelen megszüntetni a járatok felét (tehát 50-et). Ezt úgy szeretné megtenni, hogy minden városból pontosan feleannyi járata induljon, mint eddig. Bizonyítsuk be, hogy ez megtehető! (Egy járat alatt azt értjük, hogy két város között oda-vissza közlekedik egy gép. A járat megszüntetése pedig azt jelenti, hogy mind az odafelé, mind a visszafelé forgalom megszűnik.)

8. Az $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nyílt intervallumon értelmezzük a $*$ műveletet a következőképpen: $a * b = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b)$. Döntsük el, hogy I csoportot alkot-e $*$-ra nézve!