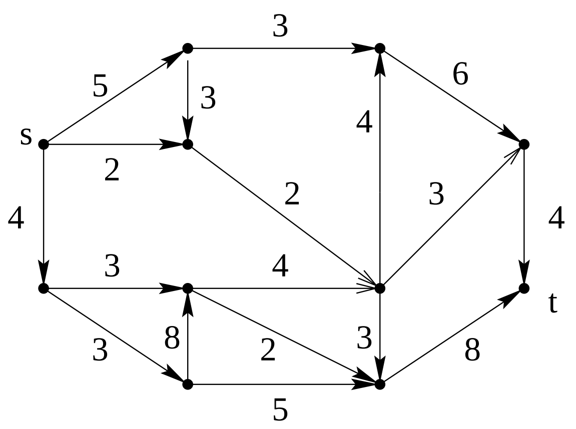
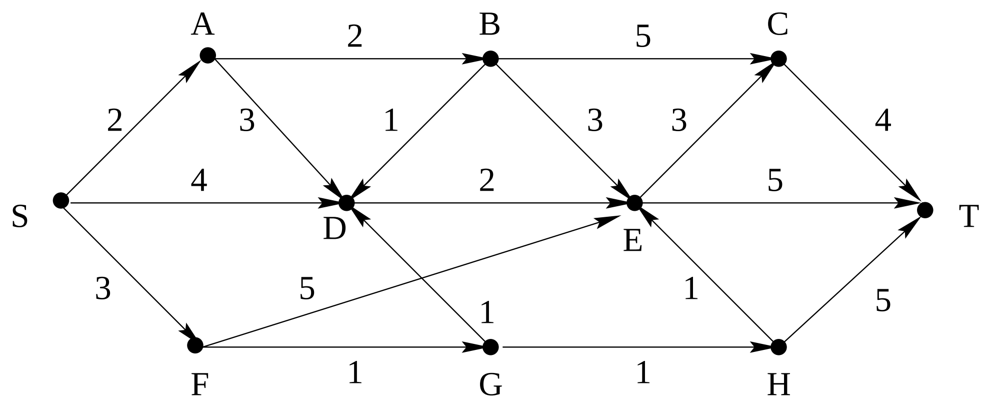
Zárthelyi feladatok

2001. március 29.

1. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú (0,1) sorozatok, két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben (0,0,0,1) és (0,1,0,1) szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-köre?
2. Legyen a G_n gráf ugyanaz, mint az előző feladatban. Van-e G_n-nek Hamilton-köre?
3. A G egyszerű gráfnak $2k + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább k a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!
4. Mutassuk meg, hogy minden egyszerű síkba rajzolható n pontú G gráfra $\alpha(G) \geq n/4$ (ahol $\alpha(G)$ a G gráf független pontjainak maximális száma).
5. Legyen a H gráf csúcshalmaza $V = \{1, 2, \ldots, 2001\}$, és az $i, j \in V$ csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $i + j$ szám 3-mal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg a következő értékeket: $\chi(H)$, $\nu(H)$, $\rho(H)$, $\tau(H)$, $\alpha(H)$
6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot!



7. A $G(V, E)$ összefüggő gráfban minden $v \in V$ ponthoz és $e \in E$ élhez van olyan kör, amely v-n is és e-n is átmegy. Mutassuk meg, hogy a G gráf kétszeresen összefüggő!
8. Állapítsuk meg, hogy mennyi a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő az alábbi PERT diagram által leírt munkafolyamatnál!



Zárthelyi feladatok

2001. május 3.

1. Legyen G egy egyszerű páros gráf és jelölje A a G szomszédsági mátrixát. Mutassuk meg, hogy ha G-ben nincs teljes párosítás, akkor $\det A = 0$!
2. Oldjuk meg a $6x \equiv 9 \pmod{15}$ kongruenciát!
3. Mi az utolsó két számjegye (a tízes számrendszerben) az alábbi számnak:
$$1997^{2001^{2005}}$$
4. Határozzuk meg az összes olyan m természetes számot és p prímszámot, melyekre $\varphi(m) = \varphi(pm)$ teljesül!
5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $p > 5$ prímszám az 1, 11, 111, 1111, ... számok közül végtelen soknak osztója!
6. Legyen a valós számok halmazán $a * b = ab + a + b$. Vizsgáljuk meg, hogy ez a művelet asszociatív-e, kommutatív-e, van-e neutrális eleme (más néven egységeleme) és hogy invertálható-e.
7. Legyen $n \geq 4$. Az n hosszú 0-1 sorozatok H_1 halmazán jelölje $+$ a modulo 2 összeadást, azaz legyen $a_1a_2 \ldots a_n + b_1b_2 \ldots b_n = c_1c_2 \ldots c_n$ ha $c_i \equiv a_i + b_i \pmod 2$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Álljon H_2 azokból a 0-1 sorozatokból, amelyekben az egyesek száma kettővel osztható, H_3 pedig azokból, amelyekben az egyesek száma hárommal osztható. Az előbb definiált művelettel csoport-e H_2 ? Csoport-e H_3 ?
8. Igazoljuk, hogy egy csoport nem állhat elő mint két valódi részcsoportjának uniója!