1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G gráfnak van Euler-köre, akkor minden vágása páros sok élet tartalmaz.

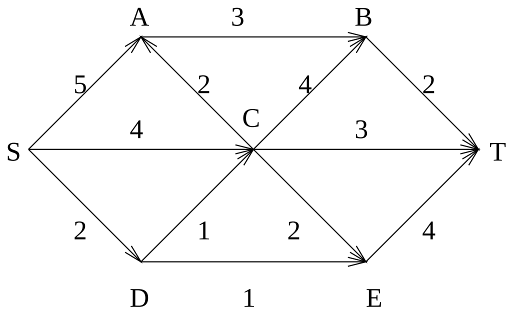
2. A $2n$ csúcsú G gráf minden fokszáma legalább n. Igazoljuk, hogy G-ben van teljes párosítás.

3. A $G = (A, B, E)$ páros gráfban az A független halmazba eső $X = \{a_1, a_2, \dots a_k\}$ részhalmaz összes csúcsa lefedhető egyetlen M párosítással. Hasonlóképp, létezik olyan M' párosítás, amely az $Y = \{b_1, b_2 \dots b_m\} \subseteq B$ részhalmazba eső összes csúcsot fedi. Bizonyítsuk be, hogy ekkor olyan M'' párosítás is létezik, amely az $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_m$ pontok mindegyikét lefedi.

4. Legyen G olyan gráf, melyre $\chi(G) = k$. Bizonyítsuk be, hogy G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon.

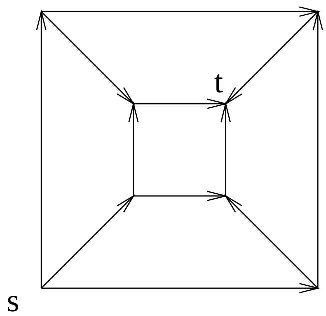
5. Legyen G olyan gráf, melyben az összes feszített részgráfra igaz, hogy abban minden tartalmazásra nézve maximális (tehát nem bővíthető) klikknek van közös pontja az adott részgráf összes tartalmazásra nézve maximális független halmazával. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

6. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges minimális időt az alábbi PERT diagramban.



7. Legyen A az n csúcsú G egyszerű, összefüggő gráf szomszédossági mátrixa. Mi a G gráf, ha tudjuk, hogy az $A + A^2$ mátrix minden eleme azonos?

8. Egy hálózati folyam gráfja a kocka élhálózata az ábrán látható irányítással. (A forrás és a nyelő a kocka két átellenes pontja, ld. ábra.)



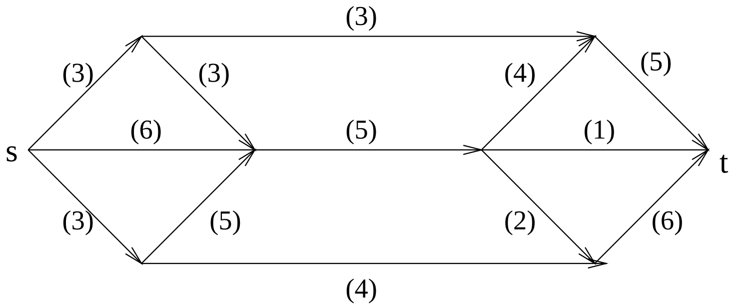
   Az éleket 1 vagy 2 kapacitásúnak választhatjuk meg a következő feltételek mellett:

   (a) az elérhető maximális folyam értéke legyen a lehető legnagyobb,

   (b) az (a) feltétel teljesítése mellett a lehető legkevesebb él kapacitása legyen 2.

   Hány 2 kapacitású élre van szükség és hogyan helyezzük el azokat?

1. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot!



2. Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k-szorosan pontösszefüggő?

3. Ha C_k jelöli a húr nélküli k hosszú kört, akkor mennyi a következő határérték

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n, C_{1999})}{\binom{n}{2}} = \ ?$$

4. Tudjuk, hogy a 3 dimenziós térben legfeljebb 4 különböző pont adható meg úgy, hogy közülük bármely kettőnek ugyanakkora legyen a távolsága. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is veszünk fel 70 különböző pontot a térben, közöttük biztosan előfordul legalább háromféle különböző távolság.

5. Egy 2000-ben születő embernek 90 éves koráig hány olyan születésnapja lesz, amikor az életkora osztója az aktuális évszámnak?

6. Milyen maradékot ad 14-gyel osztva az az x szám, melyre $4x \equiv 20 \pmod{14}$? Az összes megoldást adjuk meg!

7. Mely n számokra lesz $\varphi(n)$ prímszám?

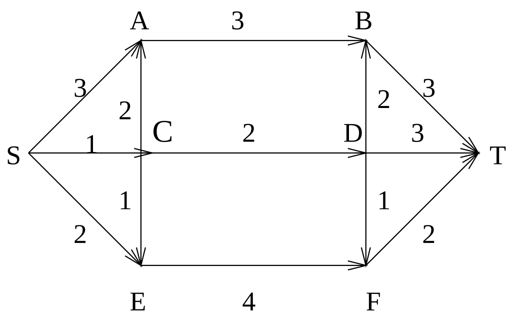
8. Tekintsük az $f(x) = ax + b$ alakú lineáris függvényeket, ahol a nem nulla valós, b tetszőleges valós szám. Legyen a $\circ$ művelet a függvények összetétele, azaz $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Igazoljuk, hogy erre a műveletre nézve az adott függvények csoportot alkotnak! Mi a csoport egységeleme?

Pótzárthelyi feladatok
Bevezetés a számításelméletbe c. tantárgyból

1999. május 19.

1. pótzárthelyi feladatai

1. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő hosszát, valamint jelöljük ki a kritikus utakat az alábbi PERT diagramon.



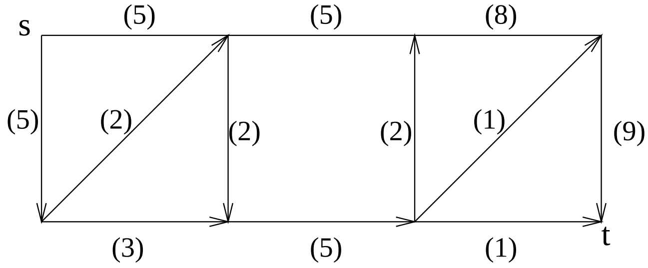
2. Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 5$-re igaz az alábbi két állítás:
i) Létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G is és a komplementere is tartalmaz Hamilton-kört.
ii) Létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G sem és a komplementere sem tartalmaz Hamilton-kört.

3. Legyen G olyan gráf melyre $\chi(G) > \omega(G)$. Mutassuk meg, hogy G-hez hozzáadhatók (az eredeti csúcsok között futó) újabb élek úgy, hogy a keletkező G' gráfra $\omega(G') = \chi(G') = \chi(G)$ teljesüljön.
Igaz-e, hogy ez mindig elérhető legfeljebb 100 új él hozzáadásával?

4. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$ csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.

2. pótzárthelyi feladatai

5. Mennyi a lehetséges maximális folyam értéke az alábbi hálózatban?



6. Adott a síkon n nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható éppen egységnyi távolságra levő pontpárok száma?

7. Oldjuk meg az alábbi kongruenciát!

$$6x + 1 \equiv 10 \pmod{15}$$

8. Milyen n érték(ek)re igaz, hogy $\phi(n)$ páratlan szám?