Bevezetés a számításelméletbe II. - Vizsgafeladatok
2000. május 25.

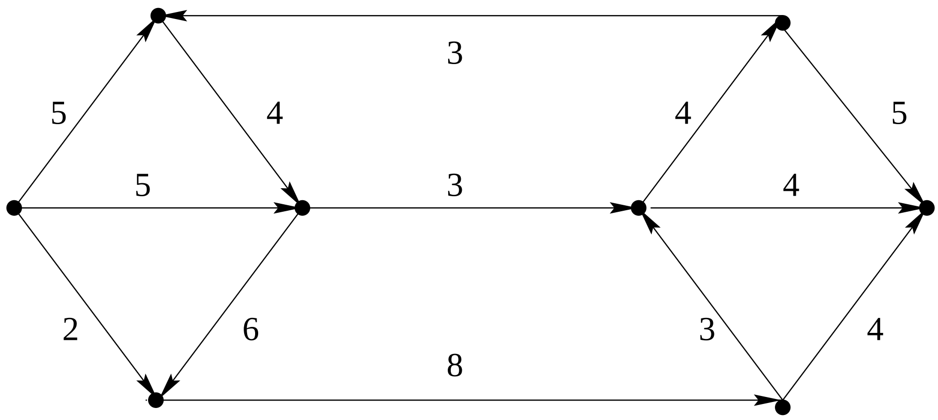
1. Egy 2000 csúcsú G gráfban a minimális fokszám 1500. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz legalább 251 páronként éldiszjunkt Hamilton-kört.

2. Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. (M_2 az egyetlen élet tartalmazó kétcsúcsú gráf, M_3 az 5 hosszú, húr nélküli kör.) Bizonyítsuk be, hogy $k > 2$ esetén $\nu(M_k) = \frac{|V(M_k)|-1}{2}$.

3. Jelölje $k(m)$ azt a legnagyobb k pozitív egész számot, amihez létezik m élű k kromatikus számú gráf. Határozzuk meg $k(m)$ értékét minden m-re.

4. Két légitársaság 10 város között üzemeltet járatokat. Minden járat két várost köt össze (oda-vissza) és bármely két város között legfeljebb az egyik társaságnak van járata. (Megengedett, hogy bizonyos városok között egyáltalán ne legyen közvetlen járat.) A két társaság megegyezett, hogy ha valamelyikük A város és B város valamint A város és C város között is üzemeltet járatot, akkor ugyanez a társaság nem repül közvetlenül B és C között. Bizonyítsuk be, hogy ilyen feltételek mellett a két légitársaság együttesen nem üzemeltethet 40-nél több járatot, 40-et viszont igen.

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot!



6. Milyen maradékot ad 60-nal osztva az az x szám, melyre $104\,x \equiv 74 \pmod{60}$?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha d osztója n-nek, akkor $d - \varphi(d) \le n - \varphi(n)$.

8. Állapítsuk meg, hogy izomorf-e a mod 4 maradékosztályok additív csoportja a mod 8 redukált maradékosztályok multiplikatív csoportjával.

Bevezetés a számításelméletbe II. - Vizsgafeladatok
2000. június 6.

1. Legyen G olyan véges egyszerű gráf melynek minden foka páros és valamely $v \in V(G)$ csúcsán az összes G-beli kör áthalad. Bizonyítsuk be, hogy minden olyan G-beli séta, amely csupa különböző élet használ fel és nem folytatható valamely már felhasznált él újbóli felhasználása nélkül, szükségképpen Euler-kör. (G-beli sétának olyan $v_1e_1v_2e_2v_3 \dots v_ie_iv_{i+1} \dots v_{k-1}e_{k-1}v_k$ sorozatot nevezünk, ahol minden i-re $v_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$ és $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$.)

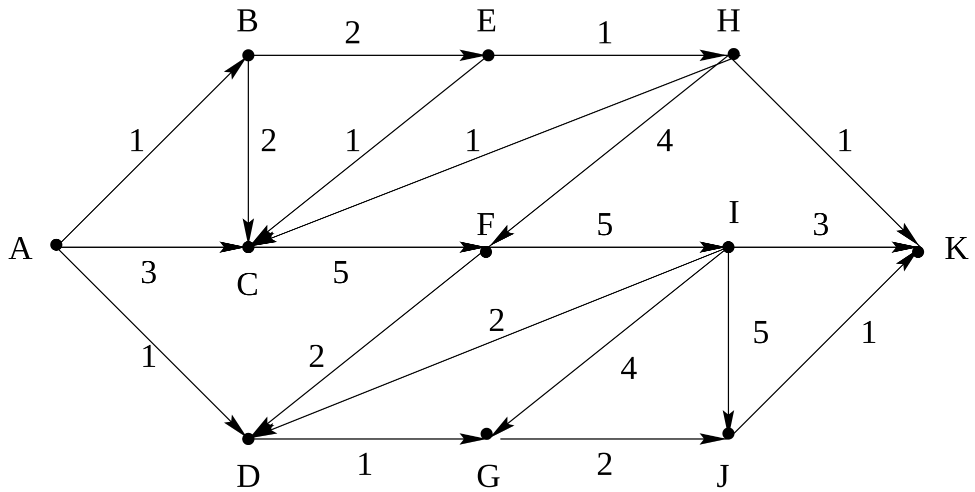
2. Egy n-szer n-es sakktábla bizonyos mezőit kijelölték, ezekre színes golyókat kell helyeznünk úgy, hogy azonos sorba, illetve, azonos oszlopba kerülő golyók nem lehetnek egyszínűek. Tudjuk, hogy semelyik sorban és semelyik

oszlopban nincs k-nál több megjelölt mező. Igaz-e, hogy ekkor k-féle színű golyóval biztosan meg tudjuk oldani a feladatot (ha mindegyikből elég sokat használhatunk)?

3. Legyen G_1 és G_2 két véges egyszerű gráf, melyek kromatikus száma három. Definiáljuk általuk az alábbi F gráfot. F csúcsai az összes olyan rendezett (u, v) párok, melyekre $u \in V(G_1)$ és $v \in V(G_2)$. Két ilyen csúcs, (u_1, v_1) és (u_2, v_2) akkor és csak akkor van összekötve F-ben, ha $\{u_1, u_2\} \in E(G_1)$ és $\{v_1, v_2\} \in E(G_2)$ is teljesül. Bizonyítsuk be, hogy F kromatikus száma is három.

4. Minimálisan hány éle kell hogy legyen egy olyan n-csúcsú egyszerű gráfnak, amely háromszögmentes, de tetszőleges két még összekötetlen csúcsát összekötve keletkezik benne háromszög?

5. Állapítsuk meg a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő hosszát az alábbi PERT diagramon.



6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n \geq 2$ pozitív egészre fennáll, hogy

$$\sigma(n)\varphi(n) < n^2.$$

7. Tudjuk, hogy az a egész számra teljesül, hogy $a^{100} \equiv 5 \pmod{31}$ és $a^{101} \equiv 19 \pmod{31}$. Milyen maradékot ad 31-gyel való osztáskor az a egész szám?

8. Legyenek G és H véges csoportok és ϕ homomorfizmus G-ből H-ba. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $g \in G$ elemre a g elem rendje osztható a $\phi(g)$ elem (H-beli) rendjével.

Bevezetés a számításelméletbe II. - Vizsgafeladatok
2000. június 20.

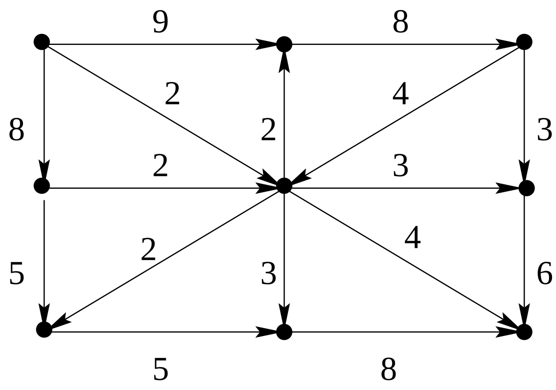
1. A G gráf $k \geq 1$ darab pontdiszjunkt (húr nélküli) körből áll. Mi az a legkisebb m szám, amelyre teljesül, hogy G-hez hozzá lehet venni m élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha n egynél nagyobb páratlan szám, akkor $L(K_n)$-nek, az n pontú teljes gráf élgráfjának, van Hamilton-köre.

3. Legyen a G gráf csúcshalmaza $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. A gráfban az olyan a és b csúcsok között van él, melyekre teljesül, hogy $a \neq b$ és vagy a osztója b-nek, vagy b osztója a-nak. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.

4. Legkevesebb hány csúcsa lehet egy olyan G egyszerű gráfnak, amely nem tartalmaz háromszöget és éleinek száma legalább kétszerese az n csúcsú teljes gráf élei számának?

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot!



6. Milyen maradékot ad 21-gyel osztva az az x szám, melyre $14x - 4 \equiv 80 \pmod{21}$?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 2$ és $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ redukált maradékrendszer modulo n, akkor

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \equiv 0 \pmod{n}.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport rendje 55, akkor minden $a \in G$ elemére teljesül, hogy az a és az a^8 elemek rendje azonos.