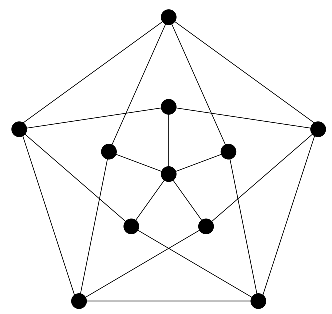
Bevezetés a számításelméletbe II. - Vizsgafeladatok
1999. június 2.

1. Döntsük el, van-e Hamilton-köre az alábbi gráfnak!

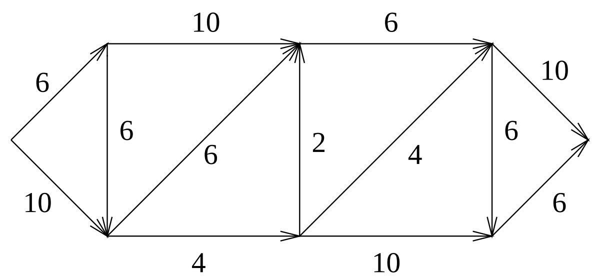


2. Legyen $r \geq 2$ és tekintsünk egy r-reguláris páros gráfot. Hagyjunk el az ennek egyik tetszőlegesen kiválasztott csúcsából kiinduló r él közül tetszőlegesen kiválasztott $(r-1)$-et. Az így megmaradó gráf legyen G. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás!

3. Egy egyszerű, összefüggő G gráf élkromatikus száma kisebb a benne található legnagyobb klikk méreténél (vagyis $\omega(G)$-nél). Bizonyítsuk be, hogy G teljes gráf!

4. Minimálisan hány éle kell, hogy legyen egy 2000 csúcsú G gráfnak, ha függetlenségi számára $\alpha(G) = 5$ teljesül?

5. Állapítsuk meg, hogy mennyi a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő az alábbi PERT diagram által leírt munkafolyamatnál! Adjuk meg a kritikus utakat is!



6. Milyen maradékot ad 24-gyel osztva az az x szám, melyre $9x \equiv 21 \pmod{24}$?

7. Mutassuk meg, hogy az olyan kétszer kettes valós A mátrixok, amelyekben a két főátlóbeli elem 1-gyel egyenlő, a bal alsó sarokban pedig 0 áll (tehát $A_{1,1} = A_{2,2} = 1$, $A_{2,1} = 0$ és $A_{1,2}$ tetszőleges valós szám) csoportot alkotnak a mátrixszorzás műveletére nézve!

8. Hány olyan eleme van a C_n ciklikus csoportnak, ami egymaga generálja a teljes C_n csoportot?

Bevezetés a számításelméletbe II. - Vizsgafeladatok
1999. június 9.

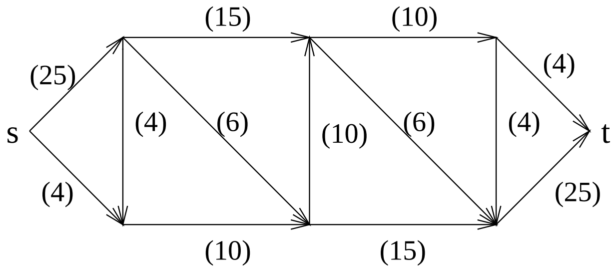
1. Jelentse M_k a Mycielski-féle konstrukcióval kapható azon gráfot, amelynek kromatikus száma éppen k. (A kiindulási 2-kromatikus M_2 az egyetlen élet tartalmazó kettő csúcsú gráf.) Adjuk meg az összes olyan $k \geq 2$ egész számot, amire M_k tartalmaz Euler-kört!

2. Mutassuk meg, hogy a $\frac{\tau(G)}{\nu(G)}$ hányados lehetséges legnagyobb értéke (az összes véges egyszerű G gráfot tekintve) 2-vel egyenlő.

3. Legyen G egy 10-reguláris egyszerű gráf, melynek 1999 csúcsa van. Mennyi a $\chi'(G)$ élkromatikus szám értéke?

4. Egy n-csúcsú teljes gráf valamennyi élét színezzük ki pirosra vagy kékre. Mutassuk meg, hogy az így kapott színezett gráfban biztosan lesz olyan Hamilton-kör, aminek vagy minden éle azonos színű, vagy előáll egy csak piros és egy csak kék éleket tartalmazó egyszerű út uniójaként.

5. Állapítsuk meg, hogy mennyi az ábrán látható hálózatban megadható folyam lehetséges maximális értéke!



6. Milyen maradékot ad 91-gyel osztva az az x szám, melyre $56\,x \equiv 35 \pmod{91}$?

7. Legyen n pozitív egész szám, melynek ismerjük $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ prímtényezős felbontását. Mennyi a

$$\sum_{d_i|n} \frac{1}{d_i}$$

érték, vagyis hogyan számítható ki az n szám osztói reciprokának az összege?

8. Legyen G kommutatív csoport és k rögzített pozitív egész szám. U jelölje G azon elemeinek halmazát, amelyek előállnak valamely G-beli elem k-adik hatványaként, vagyis

$$U = \{u \in G : \exists g \in G, g^k = u\}.$$

Mutassuk meg, hogy U részcsoport G-ben!

Bevezetés a számításelméletbe II. - Vizsgafeladatok
1999. június 23.

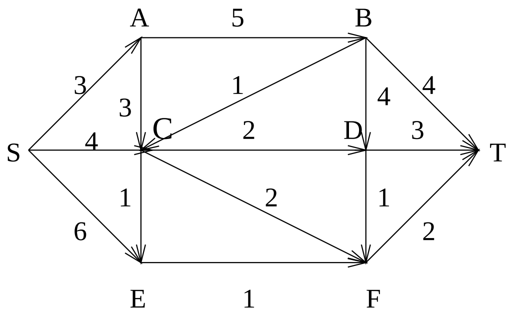
1. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler-köre, akkor G élgráfjának, $L(G)$-nek is van Euler-köre!

2. Mennyi lehet legfeljebb egy 2n csúcsú, egyszerű összefüggő G gráf klikkszáma, ha nincs G-ben teljes párosítás?

3. Legyen a G gráf egy páratlan hosszú kör és legyen adott minden csúcsához 2 megengedett szín. Úgy szeretnénk jól színezni G csúcsait (tehát oly módon, hogy összekötött csúcsok különböző színűek legyenek), hogy mindegyik csúcsnál a megengedett színek valamelyikét használjuk. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor van ilyen színezés, ha nem ugyanazt a két színt adjuk meg minden csúcshoz!

4. Igazoljuk, hogy ha az n csúcsú egyszerű G gráf éleinek száma $\frac{n^2}{4} + 1$, akkor G tartalmaz legalább két (nem feltétlenül diszjunkt) K_3 részgráfot.

5. Állapítsuk meg, hogy mennyi a feladat elvégzéséhez minimálisan szükséges idő az alábbi PERT diagram által leírt munkafolyamatnál! Adjuk meg a kritikus utakat is!



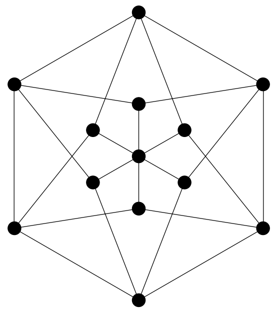
6. Milyen maradékot ad 45-tel osztva az az x szám, melyre $102\,x \equiv 40 \pmod{45}$?

7. Legyen $n > 1$ egész szám. Mutassuk meg, hogy ha összeadjuk az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egész számokat, akkor az összeg $\frac{n\,\phi(n)}{2}$ lesz.

8. Egy 49-edrendű G csoportnak van két különböző rendű eleme, melyek egyike sem az egységelem. Bizonyítsuk be, hogy G kommutatív csoport!

Bevezetés a számításelméletbe II. - Vizsgafeladatok
1999. szeptember 1.

1. Döntsük el, van-e Hamilton-köre az ábrán látható gráfnak!

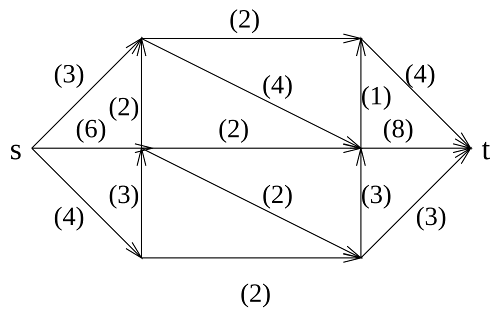


2. Mennyi a kromatikus száma az előző feladatban szereplő gráfnak?

3. Egy G egyszerű gráf csúcsainak száma 2000. Tudjuk továbbá, hogy $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!

4. Egy légitársaság összesen 100 városba repül. E 100 város közül akárhogyan választunk ki hármat, van közöttük kettő, amelyek között a társaság üzemeltet közvetlen járatot. (Minden járat mindkét irányban közlekedik.) Az is teljesül, hogy bármely városból bármely városba el lehet jutni a társaság járatain. Minimálisan hány járatot kell üzemeltetnie a társaságnak ahhoz, hogy a fentiek teljesülhessenek?

5. Állapítsuk meg, hogy mennyi az ábrán látható hálózatban megadható folyam lehetséges maximális értéke!



6. Milyen maradékot ad 42-gyel osztva az az x szám, melyre $60\,x \equiv 96 \pmod{42}$?

7. Péter a XX. század második felében született, éppen nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Hány éves Péter?

8. Az n-edrendű ciklikus csoport összes elemét négyzetre emeljük, majd az így kapott elemeket összeszorozzuk. Mivel egyenlő ez a szorzat?