Zárthelyi feladatok 1999. november 4.

1. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásait az a paraméter függvényében!

$$\begin{aligned} x-y+z &= 1 \\ 2x+y+5z &= 5 \\ x+3y+5z &= a \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az $x+y+z=5$ egyenletű sík és a $2x-y-2z=3$ egyenletű sík metszésvonalának azt a pontját, amelyik az xy síkba (vagyis az x tengely és az y tengely által meghatározott síkba) esik!

3. Az $1, 2, \ldots, n$ számok tetszőleges σ permutációjához rendeljük hozzá a $J(\sigma)$ számot, ami a $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ sorozatban azon elempárok száma, melyek nem állnak inverzióban egymással. Továbbá jelölje $I(\sigma)$ a σ permutáció inverzióinak a számát. Mely n-ekre létezik olyan σ permutáció, hogy $I(\sigma) = J(\sigma)$?

4. Az $n \times n$-es A mátrix minden eleme páros szám. Tudjuk, hogy A determinánsa osztható 64-gyel, de nem osztható 128-cal. Adjuk meg n összes lehetséges értékét!

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6. Legyen A egy $n \times n$-es invertálható mátrix, B pedig egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $AB = \underline{\underline{0}}$. Igazoljuk, hogy ekkor $B = \underline{\underline{0}}$. (Itt $\underline{\underline{0}}$ azt a mátrixot jelöli, amelynek minden eleme 0.)

7. A V vektortér két alterének, V_1-nek és V_2-nek a nullvektor az egyetlen közös eleme. Bizonyítsuk be, hogy $\dim V_1 + \dim V_2 \leq \dim V$.

8. Két játékos **A** és **B** egy kétszer kettes tábla mezőibe felváltva ír be valós számokat, amelyek egyike sem lehet nulla. Az **A** játékos célja, hogy a kialakuló 2×2-es M mátrix rangja 1 legyen, **B** pedig azt szeretné elérni, hogy M rangja legyen 2. Tételezzük fel, hogy **A** is és **B** is a lehető legjobban játszik. Ki fog nyerni, ha **A** kezdi a játékot, és ki fog nyerni, ha **B** kezd?

Zárthelyi feladatok 1999. december 9.

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében! (A j a képzetes egységet jelöli.)

$$z(1+j) - \bar{z}(1-j) = 2j$$

2. Mi a primitív tizenkettedik egységgyökök összege?

3. Mik a sajátértékei az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A}$ invertálható mátrixnak sajátértéke a λ valós szám, akkor $\lambda \neq 0$ és az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A}^{-1}$ inverzének sajátértéke lesz az $\frac{1}{\lambda}$ szám.

5. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix az $\mathbf{a}$ oszlopvektor szorzata a transzponáltjával, azaz a vele azonos koordinátákkal bíró $\mathbf{a}^T$ sorvektorral. (Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme az $\mathbf{a}$ vektor i-edik és j-edik koordinátájának szorzata.) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit mátrix!

6. Mi a számossága annak a számhalmaznak, melynek elemei azok a számok, melyek felírhatók $a + b\sqrt{k}$ alakban úgy, hogy k pozitív egész, a és b pedig racionális számok?

7. Nyolc ember szeretne teniszezni három teniszpályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két térfelét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőeknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)

8. Hány különböző olyan körmentes gráf létezik n cimkézett ponton, amelyben az élek száma valamilyen $n-1$-nél kisebb fix k szám és amiben pontosan $n-k-1$ izolált pont van? (Egy csúcsot izolált pontnak nevezünk, ha egyetlen él sem indul ki belőle.)