

Zárthelyi feladatok 1998. november 5. 8 óra

1. A három megadott síknak akkor van egynél több közös pontja, ha az egyenleteik által meghatározott egyenletrendszernek egynél több megoldása van. Oldjuk meg tehát az egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & t & 11 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -9 & t-5 & -9 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & t-23 & 0 \end{array} \right)$$

Ha egy sor konstansszorosát kivonjuk egy másiktól, a megoldások nem változnak. Az első lépésben az 1. sor kétszeresét kivontuk a 2. sorból és az ötszörösét a 3. sorból. A második lépésben a 2. sor háromszorosát vontuk ki a 3. sorból. A mátrix utolsó sorából látszik, hogy ha $t \neq 23$, akkor nincs megoldás, míg, ha $t = 23$, akkor végtelen sok megoldás van.

Tehát $t = 23$ esetén lesz a három megadott síknak egynél több közös pontja.

2.

$$\frac{(-1+i)^{1998}}{(1+i)^{2000}} = \frac{((1+i)i)^{1998}}{(1+i)^{2000}} = \frac{i^{1998}}{(1+i)^2} = \frac{-1}{(1+i)^2} = \frac{-1}{1+2i-1} = \frac{-1}{2i} = \frac{1}{2}i$$

3. Mivel a π_{k-1} permutációból úgy származtatjuk a π_k permutációt, hogy a π_{k-1} permutáció utolsó elemét a „sor elejére” tesszük, ennek az elemnek változik meg a viszonya az összes többihez képest, azaz amivel eddig inverzióban állt, azzal nem fog, amivel eddig nem állt inverzióban, azzal most fog. A többi elem egymáshoz való viszonya nem változik. Tehát, ha az előre mozgatott elem eddig l másikkal állt inverzióban és $n-1-l$ -l nem, akkor most fordítva lesz, így az inverziók száma $n-1-2l$ -l változik meg. Ez páros, ha n páratlan, és páratlan, ha n páros.

$\Rightarrow$

a) ha n páros, akkor minden második permutáció páros, tehát összesen $n/2$

b) ha n páratlan és

- $I(\pi)$ páros, akkor mind az n permutáció páros
- $I(\pi)$ páratlan, akkor egyik permutáció sem páros

4. Tudjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 111 & 100 & 225 & 235 \\ 220 & 312 & 220 & 410 \\ 215 & 180 & 268 & 305 \\ 315 & 145 & 205 & 122 \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} a_{4\pi(4)},$$

ahol az összegzés az 1, 2, 3, 4 számok minden π permutációjára megy, $I(\pi)$ az inverziók száma a permutációban, a_{ij} pedig a mátrix i . sorának j . elemét jelöli. Ez tehát jelen esetben $4!$ szorzat előjeles összege. A fenti mátrix esetében pontosan egy olyan $a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} a_{4\pi(4)}$ szorzat van, amelyik nem osztható 5-tel: főátlóbeli elemek szorzata. Így az összeg sem lehet osztható 5-tel, azaz nem lehet 0.

5. A $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + \alpha_2(\underline{v}_2 - \underline{v}_3) + \dots + \alpha_{k-1}(\underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k) + \alpha_k(\underline{v}_k - c\underline{v}_1) = 0$ -ból következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

$$\alpha_1(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + \alpha_2(\underline{v}_2 - \underline{v}_3) + \dots + \alpha_{k-1}(\underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k) + \alpha_k(\underline{v}_k - c\underline{v}_1) = \underline{v}_1(\alpha_1 - c\alpha_k) + \underline{v}_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + \underline{v}_k(\alpha_k - \alpha_{k-1})$$

Mivel a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért a fenti összeg csak úgy lehet 0, ha mindegyik vektor együtthatója 0, azaz $\alpha_1 - c\alpha_k = 0, \alpha_2 - \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_k - \alpha_{k-1} = 0$.

$\Rightarrow$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k \text{ és } \alpha_1 = c\alpha_k$$

Ha $c = 1$, akkor ennek az egyenletrendszernek $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ -n kívül más megoldása is van, tehát a fenti vektorok nem lesznek lineárisan függetlenek.

$c \neq 1$ esetén lineárisan függetlenek lesznek.

Zárthelyi feladatok 1998. november 5. 9 óra

1. A megadott egyenes akkor metszi egy pontban a síkot, ha az egyenleteik által meghatározott egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Oldjuk meg tehát az egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & p & 11 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & p-5 & 6 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & p-1 & 4 \end{array} \right)$$

Ha egy sor konstansszorosát kivonjuk egy másiktól, a megoldások nem változnak. Az első lépésben az 1. sor kétszeresét kivontuk a 2. sorból és az ötszörösét a 3. sorból. A második lépésben a 2. sor kétszeresét vontuk ki a 3. sorból. A mátrix utolsó sorából látszik, hogy ha $p = 1$, akkor nincs megoldás, míg, ha $p \neq 1$, akkor egy megoldás van.

2. Legyen x a z komplex szám valós, y pedig a képzetes része, azaz $z = x + iy$. Ekkor tehát az

$$(x + iy)^2 + x - iy = (x - iy)^2 + x + iy$$

egyenlet megoldásait keressük. Két komplex szám akkor egyenlő, ha a valós és a képzetes részük egyenlő, tehát a fenti egyenlet megoldásai azok az x, y valós számok, amelyekre

$$\text{valós rész: } x^2 - y^2 + x = x^2 - y^2 + x$$

és

$$\text{képzetes rész: } 2xy - y = y - 2xy$$

Az első egyenlőség mindig teljesül (azonosság), a másodikból pedig következik, hogy vagy $y = 0$ vagy $x = 1/2$.

A megoldás, tehát az összes valós szám és azok a komplexek, amelyeknek a valós része $1/2$.

3. A következő módon hozhatunk létre az $1, 2, \dots, n$ számoknak olyan permutációját, amiben az inverziók száma pontosan k .

Induljunk ki az természetes: $1, 2, \dots, n$ sorrendből, ahol az inverziók száma 0. Ha kicserélünk egy számot a mögötte állóval, az inverziók száma 1-gyel nő. Mozgassuk az 1-et hátrafelé, amíg az inverziók száma k nem lesz. Ha $k > n - 1$, akkor miután az 1-essel a végére értünk, induljunk el a 2-essel és mozgassuk hátrafelé, amíg az inverziók száma k nem lesz, de az 1-essel már ne cseréljük ki. stb. Ily módon bármilyen inverziószámot elérhetünk 0 és $\binom{n}{2}$ között.

4. Egy sorból kivonva egy másik sor konstansszorosát a determináns értéke nem változik. Vonjuk ki minden sorból az előzőt, azaz az n . sortól indulva, először vonjuk ki belőle az $n-1$ -et, majd az $n-1$ -ből az $n-2$ -et stb.

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & & & & \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n & n & \dots & n \\ n & n & n & \dots & n \\ \vdots & & & & \\ n & n & n & \dots & n \end{array} \right|$$

Ha $n \geq 3$, akkor van két azonos sor, és így a determináns értéke 0. $n = 1$ -re 1, $n = 2$ -re -2 a determináns.

5. $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$ azt jelenti, hogy kétszer egymás után végrehajtva az f transzformáció mindent a 0-ba visz, azaz a képtér része a magtérnek: $\text{Im}(f) \subseteq \text{Ker}(f)$, és így $\dim(\text{Im} f) \leq \dim(\text{Ker} f)$.

Másrészt a dimenziótétel szerint $\dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f) = n$.

Így $2 \cdot \dim(\text{Ker} f) \geq n$, azaz $\dim(\text{Ker} f) \geq n/2$