

Zárthelyi feladatok 1998. november 5. 8 óra

1. A t paraméter mely valós értékére lesz az alábbi három egyenlettel megadott síkoknak egynél több közös pontja:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 4 \\2x + y + 8z &= 5 \\5x + y + tz &= 11\end{aligned}$$

2. Adjuk meg az alábbi kifejezés által definiált komplex szám kanonikus alakját, azaz határozzuk meg a valós és a képzetes rész értékét:

$$\frac{(-1+i)^{1998}}{(1+i)^{2000}}$$

3. Legyen π az $1, 2, \dots, n$ számok egy permutációja és definiáljuk a $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ permutációkat a következőképpen: $\pi_1 = \pi$, továbbá $k = 2, \dots, n$ esetén $\pi_k(1) = \pi_{k-1}(n)$ és $\pi_k(j) = \pi_{k-1}(j-1)$ ha $1 < j \leq n$. Azaz a π_{k-1} permutációból úgy származtatjuk a π_k permutációt, hogy a π_{k-1} permutáció utolsó elemét a „sor elejére” tesszük. Mennyi lehet a $\pi_1, \dots, \pi_n$ permutációk között a páros sok inverzióval rendelkezők száma? Adjuk ezt meg n és $I(\pi)$ függvényében, ahol $I(\pi)$ jelöli a π inverzióinak számát!
4. Bizonyítsuk be a pontos érték kiszámítása nélkül, hogy az alábbi determináns értéke nem 0

$$\begin{vmatrix} 111 & 100 & 225 & 235 \\ 220 & 312 & 220 & 410 \\ 215 & 180 & 268 & 305 \\ 315 & 145 & 205 & 122 \end{vmatrix}$$

5. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek!

Zárthelyi feladatok 1998. november 5. 9 óra

1. Adjuk meg a p paraméter összes valós értékét, melyre az $x+y+z=1$ és $2x+y=3$ egyenletekkel megadott egyenes egy pontban metszi az $5x+3y+pz=11$ síkot!
2. Mely komplex számokra teljesül, hogy $z^2 + \bar{z} = \bar{z}^2 + z$?
3. Igazoljuk, hogy minden $0 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$ értékre van az $1, 2, \dots, n$ számoknak olyan permutációja, amiben az inverziók száma pontosan k .
4. Milyen n esetén nulla az alábbi determináns értéke?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & & & & \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2 \end{vmatrix}$$

5. Jelölje f egy n dimenziós vektortér olyan lineáris transzformációját, melynek mátrixára teljesül, hogy $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$, ahol $\underline{\underline{0}}$ a csupa 0 elemből álló mátrixot jelöli. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim(\ker f) \geq n/2$.

Zárthelyi feladatok 1998. december 10.

1. Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Legyen a V lineáris téren értelmezett $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció olyan, hogy minden $\underline{x} \in V$ vektorra teljesül: $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\underline{x})) = \mathcal{A}(\underline{x})$. Mik az $\mathcal{A}$ transzformáció lehetséges sajátértékei?
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy λ skalár sajátértéke valamely A mátrixnak, akkor az A mátrix A^T transzponáltjának is sajátértéke. (Emlékeztető: az A mátrix A^T transzponáltját úgy kaphatjuk meg, hogy A minden elemét tükrözzük a mátrix főátlójára.)
4. Hány olyan (nem 0-val kezdődő) négyjegyű szám van a tízes számrendszerben, amelyben minden számjegy különböző?
5. Hányféleképpen ültethetünk le n^2 embert n db, egyenként n üléses sorba úgy, hogy minden egyes sorban az ott ülők életkoruk szerint balról jobbra növekvő sorrendben foglaljanak helyet? (Tegyük fel, hogy mind az n^2 szereplő életkora különböző.)
6. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben minden pont fokszáma 3-mal egyenlő és a legrövidebb kör hossza pontosan 4 ?
7. Válasszuk meg az x értékét úgy, hogy az alábbi sorozat egy olyan fa Prüfer-kódja legyen, amelyben minden pont fokszáma páratlan szám. Adjuk is meg ezt a fát! A sorozat: 1, 1, 5, x , 6, 6, 8. (Egy n csúcsú fa Prüfer-kódjába beleértjük annak $(n - 1)$ -edik, n -nel egyenlő elemét is.)
8. Mi a számossága annak a halmaznak, amely a pozitív egész számok összes, véges sok elemet tartalmazó részhalmazából áll?