Bevezetés a számításelméletbe I.

Aláírás vizsgaidőszakban történő megszerzése, 2006. 01. 06. 10.00

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden részvevő **nevét** és NEPTUN kódját a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, ill. egy, a személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő.
Minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér. Értékelés: 0-31 pont: nem jár aláírás, 32-80 pont: aláírás. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlésért nem jár pont. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár.
Írószeren és üres papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.
A fenti szabályok megsértőivel szigorúan, a TVSZ szerint járunk el.

Feladatok

1. Határozzuk meg a z komplex szám abszolút értékét, ha z-re a $z^4 + 4z^2 + 5 = 0$ egyenlet teljesül!

2. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris transzformáció egy 2006-dimenziós V vektortéren, és legyen A az $\mathcal{A}$ leképezésnek egy B bázisban felírt mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy ha $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 2000$, akkor $\det A = 0$ teljesül!

3. Legyen $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ és $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ két valós nemnulla vektor, az $n \times n$-es A valós mátrix i-edik sorának j-edik eleme pedig legyen $u_i \cdot v_j$ minden szóbajövő i és j értékre. Állapítsuk meg az A mátrix rangját!

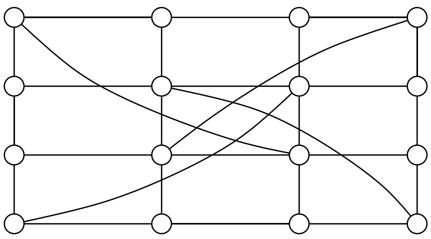
4. Legyenek A és B $n \times n$-es valós mátrixok. Döntsük el, igaz-e, hogy ha egy λ valós szám A-nak és B-nek is sajátértéke, akkor sajátértéke az AB szorzatmátrixnak is. Arról is döntsük el, hogy igaz-e, hogy ha egy $\underline{v}$ vektor A-nak és B-nek is sajátvektora, akkor sajátvektora az AB szorzatmátrixnak is.

5. Legyen G egy 6-pontú irányított gráf, azaz G minden éle az egyik végpontjából a másik végpontjába van irányítva. Tudjuk, hogy G pontjaiból rendre $4, 4, 3, 2, 1$ ill. 0 él indul ki, és a v csúcs kivételével ismerjük a pontokba beérkező élek számát is: ezek csökkenő sorrendben $5, 3, 2, 1, 1$. Határozzuk meg, hány él érkezik a v csúcsba!

6. Hány különböző módon tölthető ki egy 5 sorból és 20 oszlopból álló táblázat úgy, hogy benne az $1, 2, \ldots, 100$ számok mindegyike pontosan egyszer szerepeljen, és az elemek értéke minden egyes sorban balról jobbra haladva monoton növekedjék?

7. Legyen K teljes gráf az $1, 2, \ldots, 100$ címkéjű csúcsokon az alábbi élsúlyokkal. Az olyan élek, melyek mindkét végpontjának címkéje legfeljebb 50, egy egység súlyúak. Az olyan élek, melyek mindkét végpontjának címkéje nagyobb, mint 50, két egység súlyúak. Az olyan élek súlya, amelyeknek egyik végpontcímkéje legfeljebb 50, a másik pedig nagyobb 50-nél, három egység súlyúak. Hány különböző, minimális súlyú feszítőfa adható meg a fenti módon élsúlyozott K gráfban?

8. Síkbarajzolható-e az alábbi G gráf? (Ha igen, adjuk meg egy síkbarajzolását, ha nem, bizonyítsuk ezt be.)



Jó munkát!