Bevezetés a számításelméletbe I.

GyakIV feladatok

2004. december 20.

1. Adjuk meg a térben az alábbi egyenletekkel megadott S_1, S_2 és S_3 síkok (összes) metszéspontját!

$$\begin{aligned} S_1: \quad 2x - y + 5z &= 3 \\ S_2: \quad 3x + 2y + 6z &= 4 \\ S_3: \quad 4x - 9y + 13z &= 9 \end{aligned}$$

2. Az $n \times n$-es A mátrix minden sora olyan, hogy benne az elemek (balról jobbra haladva) számtani sorozatot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 3$, akkor A-nak nincs inverze!

3. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges, nemnulla valós számok. Az $n \times n$-es A mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem legyen $a_{ij} = x_i \cdot x_j$. Határozzuk meg A rangját!

4. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\underline{u} \in V$ tetszőleges vektor. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{u}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra lineárisan összefüggők, akkor $\underline{u} = \underline{0}$!

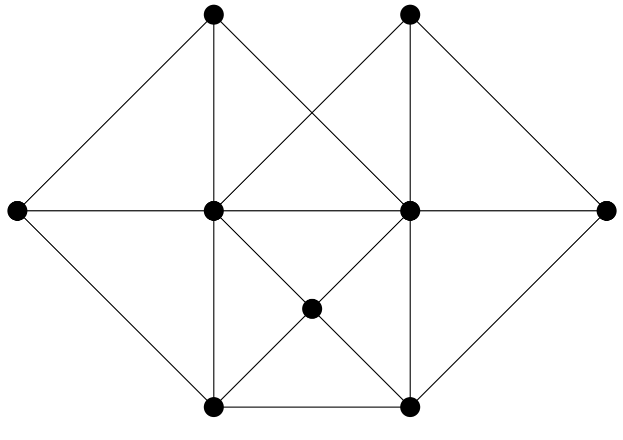
5. Legyenek A és B $n \times n$-es mátrixok és tegyük fel, hogy B-nek van inverze. Bizonyítsuk be, hogy ha a λ valós szám sajátértéke A-nak, akkor sajátértéke $(B^{-1} \cdot A \cdot B)$-nek is!

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán és az eredményt adjuk meg algebrai alakban!

$$2z^2 + (2 + 4i)z + 2i - 1 = 0$$

7. Hányféleképpen lehet egy ötöslottó szelvényt kitölteni úgy, hogy a beikszelt számok között legyen páros szám? (Az ötöslöttó szevényen az $1, 2, \ldots, 90$ számok közül kell beikszelni 5-öt.)

8. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!



Bevezetés a számításelméletbe I.

GyakIV feladatok

2005. január 3.

1. Írjuk fel a térben a $P(1,6,1)$ ponton átmenő és a $4x = z$ egyenletű síkkal párhuzamos sík egyenletét!

2. Döntsük el, hogy igaz-e az $\underline{a} \in \langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \rangle$ állítás az $\underline{a}, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra, ahol

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix}, \ \underline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát!

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 20 \end{pmatrix}$$

4. Egy $n \times n$-es A mátrix minden eleme páros egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha A-nak van inverze, akkor A^{-1}-nek legalább n darab eleme törtszám (vagyis nem egész szám)!

5. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ a V (tetszőleges) vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\underline{v}_1 + \mathcal{A}(\underline{v}_1), \underline{v}_2 + \mathcal{A}(\underline{v}_2), \ldots, \underline{v}_k + \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor $\mathcal{A}$-nak a (-1) sajátértéke!

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán és az eredményt adjuk meg algebrai alakban!

$$(\sqrt{3} \cdot i - 1) \cdot z^2 = 8$$

7. Hány különböző olyan függvény létezik, amelynek az értelmezési tartománya az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaz és az értékkészlete az $\{1, 2, \ldots, 9\}$ halmaz? (Egy ilyen függvénynek tehát az $1, 2, \ldots, 9$ számok mindegyikét fel kell venni értékként.)

8. Egy fában a legnagyobb fokú pont foka k. Mutassuk meg, hogy ekkor a fában legalább k darab 1 fokú pont van!