Bevezetés a számításelméletbe I.
GyakIV feladatok

2002. december 20.

1. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 5z & = & 3 \\ -x & + & 4y & + & z & = & 9 \\ 3x & - & 3y & - & 5z & = & 2 \\ cx & + & y & + & (2c-7)z & = & 10 \end{array}$$

2. A p paraméter milyen (valós) értékeire létezik inverze az alábbi mátrixnak?

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Öt házaspár együtt megy moziba, az egyik házaspár magával viszi egy gyerekét is. A moziban egy sorban, egymás mellé kapnak 11 helyet. Hányféleképpen ülhetnek le, ha minden felnőtt a házastársa mellett, a gyerek pedig valamelyik szülője mellett akar ülni?

4. Az $n \times n$-es A mátrix determinánsa 1. Az A mátrix minden eleméhez adjuk hozzá a vele egy sorban, tőle jobbra álló elemek számtani közepét, a kapott mátrix legyen B. (Ez tehát azt jelenti, hogy az utolsó oszlop elemei változatlanok: $b_{i,n} = a_{i,n}$, ha $1 \le i \le n$. Egyébként pedig $b_{i,j} = a_{i,j} + \dfrac{a_{i,j+1} + a_{i,j+2} + \ldots + a_{i,n}}{n-j}$, ha $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n-1$.) Mennyi B determinánsa?

5. A V vektortérbeli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorokról tudjuk, hogy $\underline{v}_1$ benne van a többi $n-1$ vektor által generált altérben, de a $\underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok közül semelyik nincs benne a többi $n-1$ vektor által generált altérben. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{v}_1 = \underline{0}$!

6. Egy $2k$ csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $k-1$, továbbá van legalább egy olyan pont, aminek a foka legalább k. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!

7. A H halmaz álljon a komplex egységgyökökből. (H tehát minden $n \ge 1$ egész számra az összes n-edik egységgyököt tartalmazza.) Határozzuk meg H számosságát!

8. Legyen V tetszőleges (legalább 1, de véges dimenziós) vektortér és $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformáció. Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ teljesül, akkor $\mathcal{A}$-nak a 0 sajátértéke.

Bevezetés a számításelméletbe I.
GyakIV feladatok
2003. január 9.

1. A c paraméter minden valós értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját!

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix}$$

2. A $P(1,-2,5)$ és a $Q(7,6,1)$ pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben síkot határoz meg (a P és a Q felezőmerőleges síkját). Határozzuk meg ennek a síknak az egyenletét!

3. Milyen $n \geq 1$ egész értékekre létezik inverze annak az $n \times n$-es A mátrixnak, amelyben az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében $a_{ij} = \sqrt{ij} - 1$ áll?

4. Az angol ábécé 26 betűjéből hány olyan nyolcbetűs szó készíthető, amelyben minden betű különböző és a betűk ábécé szerinti sorrendben követik egymást? (A szavaknak nem kell értelmesnek lenniük; így például a CEKMPTWY szó megfelel a feladat feltételeinek.)

5. A z komplex számra $z^{2003} = 1 + i$ teljesül. Határozzuk meg $(\overline{z})^{2003}$ értékét!

6. Van-e olyan 2003 csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka különböző?

7. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.
b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

8. A (tetszőleges vektortérbeli) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ ($n \geq 1$) vektorokról tudjuk, hogy lineárisan függetlenek, de bárhogy vennénk hozzájuk egy további vektort, a kapott $n+1$ vektor már lineárisan összefüggő volna. Igaz-e mindig, hogy $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ bázis?