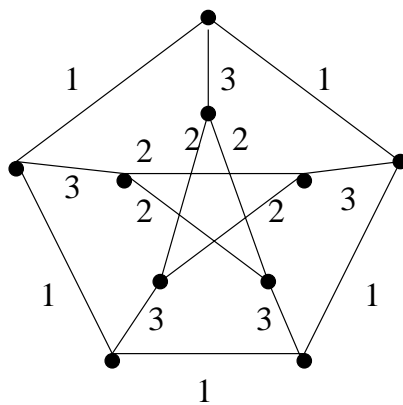
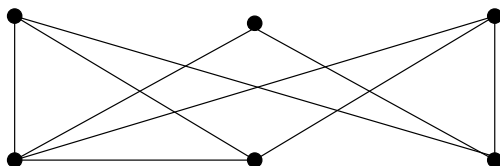


1. Legyen  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (1, -2, 3)$  két pont, a  $B$  ponton átmenő  $e$  egyenes egyenlete  $(x - 1)/5 = (y + 2)/3 = z - 3$ . Keressük meg az  $e$  egyenesen azokat a pontokat, melyekre az  $ABC$  háromszögben  $\overline{AB} = \overline{BC}$  teljesül!
2. A kétezredik komplex egységgyökök közül hány olyan van, melynek az ezredik hatványa is eggyel egyenlő?
3. Igazoljuk, hogy ha az  $(n \times n)$ -es  $A$  mátrixnak minden eleme  $+1$  vagy  $-1$ , akkor  $\det A$  osztható  $(2^n - 1)$ -gyel!
4. Egy  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  lineáris transzformáció vetítés, ha  $\mathcal{A}(\mathcal{A}(v)) = \mathcal{A}(v)$  teljesül minden  $v \in V$  vektorra. Adjunk példát olyan vetítésre, melynek mátrixához tartozó kvadratikus alak pozitív szemidefinit!
5. Tekintsük a síkon azon négyzetek halmazát, melyeknek legalább az egyik csúcsa egész koordinátájú (a pont mindkét koordinátája egész szám). Mennyi ennek a halmaznak a számossága?
6. Mennyi az 1, 2, 3, 4 számjegyekből előállítható olyan négyjegyű számok összege, melyekben mindegyik számjegy pontosan egyszer fordul elő?
7. Határozzuk meg hogy az alábbi gráfban hány különböző minimális súlyú feszítőfa található!



8. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen rajzoljuk le úgy a síkba, hogy élei egyenes szakaszok legyenek, ha nem rajzolható síkba, bizonyítsuk ezt be.



1. Legyen  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (1, -2, 3)$ ,  $C = (3, 2, -4)$  a tér három pontja. Melyik az a  $D$  pont, melyre az  $ABCD$  négyszög parallelogramma?
2. Mely komplex számokra teljesül a

$$2(z + \bar{z}) = |z|$$

egyenlet?

3. Tetszőleges valós  $t$  számra és tetszőleges pozitív egész  $k$  számra számítsuk ki az

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k$$

mátrixot!

4. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátalttereket!

5. Mennyi az olyan végtelen hosszú  $0 - 1$  sorozatok halmazának számossága, melyekben pontosan 5 darab egyes fordul elő?
6. Hány hatra végződő négyvel osztható ötjegyű szám van?
7. Ketten a következő játékot játsszák. Adott  $n$  pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az  $n$  pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki egy olyan élet húz be, amitől a gráfban kör keletkezik. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos fog nyerni, ha feltesszük, hogy mindketten a lehető legjobban játszanak?
8. Van-e olyan 9 pontú  $G$  gráf, hogy sem  $G$ , sem a komplementere  $\overline{G}$  nem síkbarajzolható?

### Bevezetés a számításelméletbe I.

#### Vizsgazárthelyi feladatok

2001. január 15.

1. Számítsuk ki az  $A = (1, 3, 5)$ , a  $B = (2, 0, 1)$  és a  $C = (3, 0, 3)$  pontok által meghatározott háromszög  $S$  súlypontját! Határozzuk meg a térnek azon pontjait, melyek rajta vannak az  $ABC$  síkra az  $S$  pontban állított merőleges egyenesen!

hatványa nem egyenlő eggyel?

3. Mennyi az  $(n \times n)$ -es  $A = (a_{ij})$  mátrix determinánása, ha

$$a_{ij} = \begin{cases} (i - j + 1)^2 & \text{ha } i \geq j \\ 0 & \text{ha } i < j \end{cases}$$

4. Legyen  $A$  egy  $(2 \times 3)$ -as mátrix és legyen  $B = AA^T$ . Bizonyítsuk be, hogy a  $B$ -hez tartozó kvadratikus alak pozitív definit vagy pozitív szemidefinit. Adjunk példát olyan  $A$ -ra, amikor  $B$  pozitív definit és olyan  $A$ -ra is, amikor  $B$  pozitív szemidefinit de nem pozitív definit!

5. Mennyi az olyan nullával kezdődő végtelen hosszú sorozatok halmazának számossága, melyekben bármely két szomszédos tag különbsége  $\pm 1$  ?

6. Hányféleképpen tölthették ki azt a lottószelvényt, amelyen pontosan három találat volt? (A lottón 90 számból húztak ki 5 számot.)

7. A  $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$  (számozott) pontokon hány olyan egyszerű  $G$  gráf adható meg, melynek  $2n - 2$  éle van és két egyforma méretű összefüggő komponensből áll?

8. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen rajzoljuk le úgy a síkba, hogy élei egyenes szakaszok legyenek, ha nem rajzolható síkba, bizonyítsuk ezt be.

