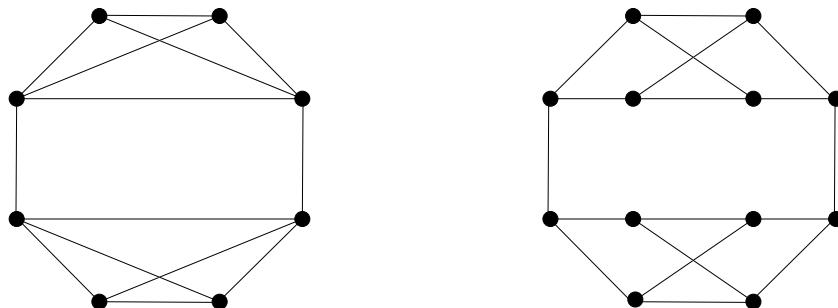


Vizsgázárthelyi feladatok, 1999. január 6.

1. Az $n \times n$ -es A és B mátrixokra teljesül, hogy $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$.
2. Milyen z komplex számokra lesz $z + \bar{z}^2$ valós?
3. Tekintsük azt a lineáris leképezést, amely tetszőleges pontot az $x + y + z = 0$ egyenletű síkra vonatkozó tükröképébe visz. Mi ennek a leképezésnek a mátrixa a szokásos bázisban, melynek elemei az x , az y és a z tengely irányába mutató egységvektorok?
4. Tekintsük azt a lineáris leképezést amely egy 4 dimenziós tér b_1, b_2, b_3, b_4 vektorokból álló bázisát ciklikusan permutálja, azaz b_1 -et b_2 -be, b_2 -t b_3 -ba, b_3 -at b_4 -be és b_4 -et b_1 -be viszi. Adjuk meg ennek a lineáris leképezésnek összes (komplex) sajátértékét és az ezekhez tartozó sajátvektorokat.
5. Tekintsük az összes olyan orogóból induló és véges sok lépés után ugyanott végetérő sétát, amelynek minden lépése az x vagy az y tengellyel párhuzamos (pozitív vagy negatív irányú) egységszakasz. Mi a számossága ezen séták halmazának?
6. Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

7. Hány olyan fa adható meg az $1, 2, \dots, 100$ csúcsokon, melynek van olyan éle, amit elhagyva a maradék gráf két komponensének pontjai rendre az $1, 2, \dots, 50$, illetve az $51, 52, \dots, 100$ csúcsok?
8. Állapítsuk meg az alábbi két gráfról, hogy síkgráf-e!

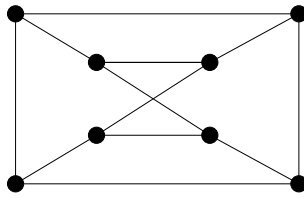


Vizsgázárthelyi feladatok, 1999. január 13.

1. Adjuk meg a t valós paraméter értékétől függően az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásait:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= t \\ x - 8y + 9z &= 10 \\ 2x - y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $n \times n$ -es A mátrixban a főátló alatt álló összes elem nulla (vagyis A háromszögmátrix), akkor ugyanez igaz A minden pozitív egész kitevőjű A^n hatványára is.
3. Legyen $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ és $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Milyen pozitív egész n -ekre lesz $z_1^n + z_2^n$ valós?
4. Tekintsük azt a lineáris leképezést amely egy 6 dimenziós tér $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ vektorokból álló bázisában párcseréket végez úgy, hogy b_1 -et b_2 -be, b_2 -t b_1 -be, b_3 -at b_4 -be, b_4 -et b_3 -ba, b_5 -öt b_6 -ba és b_6 -ot b_5 -be viszi. Adjuk meg ennek a lineáris leképezésnek összes (komplex) sajátértékét és az ezekhez tartozó sajátvektorokat.
5. Tekintsük az összes olyan végtelen $0 - 1$ sorozatot, amelynek tetszőleges véges kezdőszeletében több a 0, mint az 1-es. Mi a számossága ezen sorozatok halmazának?
6. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \dots, n$ számoknak, amelyekben a páros és páratlan számok felváltva követik egymást?
7. Egy fának nyolc csúcsa van, a foksámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a kétféle szám?
8. Állapítsuk meg, hogy az alábbi gráf síkgráf-e!

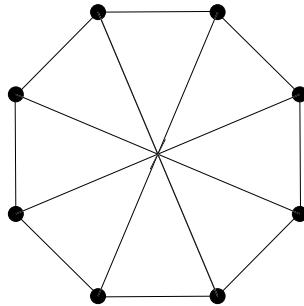


Vizsgazárthelyi feladatok, 1999. január 20.

1. Az a paraméter mely valós értékeire metszi az $x - 1 = (y + 1)/3 = z - 1$ egyenletekkel megadott egyenes az $x + 2y + az = 3$ síkot? Ha van metszéspont, határozzuk meg a koordinátáit.
2. Oldjuk meg az $1 + zi - z^2 = 0$ komplex változós egyenletet!
3. Tekintsük azt a síkbeli lineáris leképezést, ami a sík pontjait először a derékszögű koordinátarendszer y tengelyére, majd az így kapott képet az $x + y = 0$ egyenletű egyenesre tükrözi, így kapva meg a leképezés végeredményét. Mi ennek a leképezésnek a mátrixa a szokásos derékszögű bázisban?
4. Mennyi az alábbi mátrix rangja?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Hány olyan végtelen hosszú $0 - 1$ sorozat van, amiben az 1-esek száma véges?
6. Egy 12 fős társaságot egy szálloda két háromágyas és három kétágyas szobájában kell elszállásolni. Hány különböző szobabeosztás lehetséges, ha az azonos számú ágyat tartalmazó szobákat nem különböztetjük meg egymástól?
7. Legyenek egy G gráf fokszámai nagyság szerint növekvő sorrendben $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Tegyük fel, hogy minden $k \leq n - d_n - 1$ -re teljesül, hogy $d_k \geq k$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G szükségképpen összefüggő gráf.
8. Állapítsuk meg, hogy az alábbi gráf síkgráf-e!



Vizsgazárthelyi feladatok, 1999. január 27.

1. Állapítsuk meg, hogy n -től függően mi lesz egy $n \times n$ -es mátrix determinánsának felírásában a mellékátlóban álló elemek szorzatának előjele. (A mátrix mellékátlóján a jobb felső és a bal alsó sarkot összekötő egyenest értjük.)
2. Az $(x - 5)/3 = (y - 2)/2 = (z + 1)/a$ egyenletekkel megadott egyenes az a paraméter mely valós értékei esetén metszi az $x - 1 = (y - 2)/2 = (z - 3)/3$ egyenletekkel adott egyenest? Ha van metszéspont, határozzuk meg a koordinátáit.
3. Számítsuk ki

$$\left(\frac{3 - i}{2 - 4i} \right)^{2000}$$

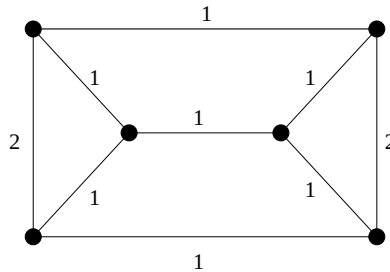
értékét!

4. Mutassuk meg, hogy a legfeljebb n -edfokú polinomok lineáris terében bázist alkotnak az

$$1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^n$$

polinomok.

5. Mutassuk meg, hogy a természetes számok összes sorbarendezései halmazának számossága kontinuum.
 6. Tizenöt vívóból hányféleképpen alakíthatunk három (nem feltétlenül diszjunkt) négyfős csapatot?
 7. Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az alábbi élsúlyokkal ellátott gráfnak?



8. Mutassuk meg, hogy egy nyolc csúcsú teljes gráfot a síkra lerajzolva legalább 10 élkeresztezés jön létre.

Vizsgázárthelyi feladatok, 1999. február 3.

1. Adjuk meg az alábbi mátrix 2000-edik hatványát!

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix által definiált lineáris leképezés magterének dimenzióját a c paraméter függvényében

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & c \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Az $n \times n$ -es A mátrixra teljesül, hogy $A^2 + A + E = \underline{\underline{0}}$. Igazoljuk, hogy az A mátrixnak létezik inverze. (Itt E az egységmátrixot, $\underline{\underline{0}}$ pedig a csupa 0 mátrixot jelöli.)
 4. Mely z komplex számok elégítik ki az $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{12} = 1$ egyenletet?
 5. Mi a valós számokon megadható olyan nyílt intervallumok halmazának számossága, melyeknek mindkét végpontja racionális szám?
 6. Hányféleképpen bontható fel egy $4k$ elemű halmaz 4 darab páronként diszjunkt k elemű részhalmazra?
 7. Egy n csúcsú fa fokszámai $n-1$ félék. Mekkora lehet n értéke?
 8. Egy 20 csúcsú konvex poliéder lapjainak száma 12. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?