Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok

2002. október 31.

1. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{aligned} x+2y+z+2t&=5\\ 3x+6y+2z+5t&=13\\ 4x+8y+2z+ct&=17 \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 23 \end{pmatrix}$$

3. A c paraméter minden valós értékére határozzuk meg az alábbi mátrix rangját!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & c & -12 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2;-2;1)$ ponton és amely merőleges a $2x-8y-9z+6=0$ egyenletű, valamint az $x+11y+3z=12$ egyenletű síkok metszésvonalára!

5. Egy $n\times n$–es mátrix minden eleme 0, vagy 1. A mátrix minden sora olyan, hogy ha valamelyik eleme 0, akkor az összes, ettől az elemtől balra álló elem is 0. Milyen értékeket vehet fel a mátrix determinánsa?

6. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra?

a) Ha van olyan $\underline{b}$ (n magas oszlopvektor), amelyre az $A\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszer nem megoldható, akkor $\det A=0$.

b) Ha $\det A=0$, akkor van olyan $\underline{b}$ (n magas oszlopvektor), amelyre az $A\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszer nem megoldható.

7. Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ (tetszőleges vektortérbeli) vektorok lineárisan függetlenek, ha tudjuk, hogy az $\underline{a}+2\underline{b}$, $\underline{b}+2\underline{c}$, $\underline{c}+2\underline{a}$ vektorok lineárisan függetlenek!

8. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két, 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különböző közös eleme!

Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok
2002. december 5.

1. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi A mátrixnak a 0 sajátértéke legyen! A kapott mátrixnak keressük meg a többi sajátértékét is és a legnagyobb sajátértékhez keressünk egy sajátvektort!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg az

$$\left(i - \sqrt{3}\right)^9$$

komplex szám algebrai (avagy kanonikus) alakját!

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán! (Az eredményt algebrai alakban adjuk meg!)

$$(i + 3)z^2 + (i + 4)z + 2 = 0$$

4. Egy csomag francia kártyában 52 különböző lap és három teljesen ugyanolyan dzsoli található. Ha megkeverjük a kártyacsomagot, hányféle különböző sorrendje alakulhat ki a lapoknak?

5. L. Ottó minden héten nyolc szelvénnyel ötöslottózik. A szelvényeket teljesen találomra tölti ki, még arra sem figyel, hogy ne dobjon be két ugyanúgy kitöltött lottószelvényt. Hányféleképpen töltheti ki egy héten a nyolc lottószelvényt? (A kitöltött szelvények sorrendje természetesen közömbös. Az ötöslottóban 90 szám közül kell beikszelni öt különbözőt.)

6. A H halmaz álljon az összes olyan, az a és b betűkből készített, végtelen hosszú sorozatokból, amelyekben minden n pozitív egészhez található n darab szomszédos b betű. Határozzuk meg H számosságát!

7. Hány olyan páronként nem izomorf 7 pontú fa van, amelynek pontosan egy darab harmadfokú csúcsa van? (Rajzoljuk is le az összes ilyen fát!)

8. Legyen V egy n–dimenziós vektortér és $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformáció. Tegyük fel, hogy a tér $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_k$ vektorai lineárisan függetlenek és $\mathcal{A}(\underline{v}_1) = \mathcal{A}(\underline{v}_2) = \ldots = \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy ekkor bárhogy választunk a térben $n - k + 2$ darab vektort — jelölje ezeket $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_{n-k+2}$ —, az $\mathcal{A}(\underline{w}_1), \mathcal{A}(\underline{w}_2), \ldots, \mathcal{A}(\underline{w}_{n-k+2})$ vektorok mindig lineárisan összefüggők lesznek.

Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok
2002. december 10.

1. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset!

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & cz & = & 6 \\ 2x & + & y & + & (c+1)z & = & 10 \\ 3x & - & 2y & + & (c-1)z & = & 8 \\ 7x & - & 12y & - & 5z & = & 4 \end{array}$$

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Az r és s valós paraméterek milyen értékeire lesz a $2x + r \cdot y + s \cdot z = \sqrt{2}$ egyenletű sík merőleges a $6x + 21y + 19z = 3$, valamint az $x + 6y + 4z = 3$ egyenletű síkok metszésvonalára?

4. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$. Határozzuk meg A determinánsát!

5. Legyen V a valós együtthatós polinomok szokásos vektortere (a polinomok összegét és számszorosát a szokásos módon értelmezzük). W álljon azokból a p polinomokból, amelyekre $p(0) = p(1)$ (vagyis 0-ban és 1-ben p helyettesítési értéke egyenlő). Döntsük el, hogy W alteret alkot-e V-ben?

6. A V vektortérbeli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorokról tudjuk, hogy az összegük a nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{n-1} \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n \rangle$! ($\langle\ \rangle$ a vektorok által generált alteret jelöli.)

7. Határozzuk meg az $n \times n$-es A mátrixot, ha tudjuk, hogy $A^2 = E$ és $\det(A - E) \neq 0$. (E-vel az $n \times n$-es egységmátrixot jelöltük.)

8. Legyen A és B $n \times m$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B)$$

(ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük).

Bevezetés a számításelméletbe I.

Pótzárthelyi feladatok

2002. december 12.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és a kisebbik sajátértékhez keressünk egy sajátvektort!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg a

$$\sqrt[3]{24i + \frac{(i-1)^8}{i}}$$

komplex szám algebrai alakját!

3. A bridzset négy ember játssza, két pár egymás ellen. Hányféleképpen ülhet le nyolc ember két asztalhoz bridzselni? Két leülést akkor tekintünk különbözőnek, ha vagy van olyan ember, akinek más a partnere, vagy van olyan pár, akiknek egy másik pár az ellenfele. (A két asztal sorrendje tehát közömbös, és az asztalokon belül az ülésrend is csak annyiban számít, hogy ki kinek a partnere.)

4. Jelölje V a valós számpárok (azaz a síkvektorok) szokásos vektorterét. Egy $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációról tudjuk, hogy az $(1,2)$ vektorhoz a $(6,7)$ vektort, a $(-1,2)$ vektorhoz pedig a $(8,9)$ vektort rendeli. Írjuk fel $\mathcal{A}$ mátrixát a „szokásos", vagyis az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorokból álló bázisban!

5. Van-e olyan 100 csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka 54?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fában nincs se másodfokú, se harmadfokú pont, akkor a csúcsoknak legalább a $\frac{2}{3}$-a elsőfokú!

7. A H halmaz álljon az összes olyan, az a és b betűkből készített, végtelen hosszú sorozatokból, amelyek valahonnan kezdve periodikusak. (Ez tehát azt jelenti, hogy van egy $p \geq 1$ periódus és egy N küszöb, hogy minden $n \geq N$-re a sorozat n-edik és $n+p$-edik betűje ugyanaz.) Határozzuk meg H számosságát!

8. Az $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációra teljesül, hogy minden $\underline{v} \in V$-re $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\underline{v})) = \underline{v}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{A}$-nak az 1 vagy a -1 sajátértéke!