

1. Számítsuk ki:

(a) $(2 + i)^7 + (2 - i)^7$

(b) $\frac{a+bi}{a-bi}$

(c) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

(d) $(a + b)(a + b\omega)(a + b\omega^2)$ ahol $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

(e) $\sqrt{-8i}$

2. Hozzuk egyszerűbb alakra: $(\sqrt{3} - i)^n$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(a) $z^2 + 3 = 0$

(b) $z^2 - 5 + 12i = 0$

(c) $z^4 - 3z^2 - 1 = 0$

(d) $z + \bar{z} = 2z$

(e) $\bar{z} = z^{2004}$

4. Mi $|z|$, $|z_1 - z_2|$, iz geometriai jelentése? Milyen számokat kapunk ha az $a + bi$ számnak megfelelő pontot tükrözzük

(a) a valós tengelyre;

(b) a képzetes tengelyre;

(c) az $y = x$ egyenletű egyenesre?

5. Mi azon z komplex számok mértani helye, melyekre

(a) $|z| = 1$;

(b) $\operatorname{Re}(z + i\cos|z|) = 2$;

(c) $(\operatorname{Re}(z))^2 < 4$;

(d) $\operatorname{Im}(z^2) = 2$.

6. Adjuk meg $1 + i$, $\sqrt{3} - i$, valamint $\sin \alpha - i \cos \alpha$ trigonometrikus alakját.

7. Mik lesznek egy egységgyök hatványai?

8. Jelölje e_0, e_1, \dots, e_{n-1} az n -ik komplex egységgyököket. Kiszámítandó $\sum_{i=0}^{n-1} e_i$ és $\prod_{i=0}^{n-1} e_i$.

9. Van-e a kilencedik egységgyökök között pontosan hat, melyek összege 0? És hét?

10. Bizonyítsuk be, hogy az 1995-ik egységgyökök között van 876, melyek összege 0.

11. A z komplex számra $1 + z + z^2 = 0$. Igazoljuk, hogy $z^{65} + z^{-65} = i^{66}$.

12. Mi a mértani helye a komplex számsíkon a $\frac{1+ti}{1-ti}$ alakú számoknak, ha t befutja a valós számok halmazát? Ugyanez a kérdés $\frac{1+ti}{i+i}$ -vel?

13. Igazoljuk, hogy ha $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$, akkor $z^m + \frac{1}{z^m} = 2 \cos m\theta$.

14. Fejezzük ki $\cos \alpha$ és $\sin \alpha$ segítségével $\cos n\alpha$ -t.

15. Adjunk zárt alakot:

(a) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$

(b) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$

16. Legyen ε egy $2n$ -edik primitív egységgyök. Számítsuk ki: $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n$ -t.