2005. szeptember 27.

1. Számítsd ki a
$$x-2=\frac{-y+3}{2}=z-4 \text{ és } x+1=\frac{y+7}{3}=-z+5$$
egyenesek metszéspontját!

2. Számítsd ki a $P(2,1,1)$ pont $x+y-z+1=0$ síktól való távolságát!

3. Oldjuk meg a következő egyenletet.
$$\frac{x-1974}{30}+\frac{x-1976}{28}+\frac{x-1978}{26}+\frac{x-1980}{24}=\frac{x-30}{1974}+\frac{x-28}{1976}+\frac{x-26}{1978}+\frac{x-24}{1980}$$

4. Határozzuk meg a $(2,0,0),(0,-1,0),(0,0,5)$ pontokra illesztett sík egyenletét.

5. A z paraméter mely értékei mellett merőleges a $(5,-3,2)$ és $(7,4,z)$ vektor egymásra?

6. Döntsük el, hogy a valós együtthatós polinomok alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e a szokásos műveletekkel.
   (a) $\{f \mid \deg f = 100 \text{ vagy } f=0\}$;
   (b) $\{f \mid \deg f \leq 100 \text{ vagy } f=0\}$;
   (c) $\{f \mid \deg f \geq 100 \text{ vagy } f=0\}$;
   (d) $\{f \mid f(5)=0\}$;
   (e) $\{f \mid f(5)=1\}$;
   (f) $\{f \mid f \text{ minden együtthatója racionális}\}$.

7. Legyen $V=\mathbb{Z}$ a szokásos összeadással, és $T=\mathbb{Q}$. Lehet-e a $\odot$ skalárral való szorzást úgy értelmezni, hogy vektorteret kapjunk?

8. Legyen V vektortér, W pedig egy nem-triviális altere. Melyek igazak az alábbi állítások közül ($\underline{u},\underline{v}\in V, \lambda\in\mathbb{R}$)?
   (a) $\underline{u}+\underline{v}\in W \Longrightarrow \underline{u},\underline{v}\in W$;
   (b) $\lambda\neq 0, \lambda\underline{u}\in W \Longrightarrow \underline{u}\in W$;
   (c) $\underline{u}\in W, \underline{v}\notin W \Longrightarrow \underline{u}+\underline{v}\notin W$.

9. Legyen W a V vektortér egy altere, $\underline{u},\underline{v},\underline{w}\in V$, továbbá tegyük fel, hogy
$$\underline{u}+\underline{v}\in W,\ \underline{u}+2\underline{w}\notin W,\ \underline{w}+3\underline{u}\in W.$$
Mit állíthatunk az $5\underline{u}+3\underline{v}+\underline{w}$, illetve $6\underline{u}+3\underline{v}+\underline{w}$ vektorok és W kapcsolatáról?

10. (*) Bizonyítsuk be, hogy a (valós test feletti) V vektortér nem állítható elő véges sok valódi alterének egyesítéseként.

11. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{A}=\{\underline{a}_i\colon i\in I\}$ vektorhalmaz generátuma megegyezik a V vektortér legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó alterével.

12. Legyen $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ egy vektortér lineárisan független vektorhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a}+\underline{c}$, és $\underline{b}+\underline{c}$?

13. Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy vektortér lineárisan független vektorhármasa, λ egy skalár. A $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}-\underline{b}-\underline{c}$, $\underline{b}-\lambda\underline{c}$ vektorhármas a λ paraméter mely értékeire lesz lineárisan összefüggő, illetve lineárisan független?

14. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k\}$ lineárisan független rendszer, $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{k+1}\}$ pedig lineárisan összefüggő vektorrendszer, akkor a kettő közül pontosan az egyik bázis.

15. Milyen p-re van benne az (1,3,5) vektor a (1,1,0), (0,0,1), $(1, p, 1)$ vektorok által generált altérben?

16. Milyen a-ra van megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} x + az &= 3 \\ y + z &= 5 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

17. Adjuk meg p és q értékét úgy, hogy az alábbi síkok egy egyenesre illeszkedjenek.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 6 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ 4x - 3y + pz &= q \end{aligned}$$

18. Létezik-e olyan egyenes, amelyik az alábbi három sík mindegyikével párhuzamos? Ha igen, adjuk meg közülük az origón átmenőt.

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 1 \\ x + 7y + 4z &= 3 \\ 3x - 5y - z &= 2 \end{aligned}$$

19. (*) Tekintsük az összes valós számon értelmezett valós értékű függvényeket a *racionális* számok feletti vektortérként, a szokásos műveletekre. Legyen ebben H az egész értékű függvények halmaza. Döntsük el, hogy az alábbi függvények elemei-e a H által generált $\langle H \rangle$ altérnek.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{7}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}; \\ \frac{3}{8}, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

20. (*) Tekintsük a valós számokat a *racionális* számok feletti vektortérként, a szokásos műveletekkel. Bizoyítsuk be, hogy különböző prímszámok rögzített alapú logaritmusai mindig lineárisan függetlenek.

21. (*) Tekintsük a valós számokat a *racionalis* számok feletti vektortérként, a szokásos műveletekkel. Tegyük fel, hogy egy α valós szám pozitív egész kitevőjű hatványai k dimenziós alteret generálnak. Mekkora az a legkisebb j fok, hogy az α szám egy j-d fokú egész együtthatós polinom gyöke?

22. (**) Legyen V egy 100-dimenziós vektortér a valós számok felett. Hány olyan vektor létezik V-ben, melyek közül *bármely* 100 bázist alkot?

23. (**) A *Fibonacci-számok* sorozatát a

$$f_0 = f_1 = 1, \quad f_{i+1} = f_i + f_{i-1}, \; i = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

rekurzióval definiáljuk. Adjunk explicit képletet f_n-re. *Útmutatás:* A (1)-t kielégítő valós számsorozatok vektorteret alkotnak.

24. Egy V vektortér $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ elemeiről tudjuk, hogy az $\underline{a}_i + \underline{a}_j$, $1 \leq i < j \leq k$ vektorok bázis alkotnak V-ben. Mekkora lehet V dimenziója?