2005. szeptember 20.

1. Van-e a kilencedik egységgyökök között pontosan hat, melyek öszege 0? És hét?

2. Bizonyítsuk be, hogy az 1995-ik egységgyökök között van 876, melyek öszege 0.

3. A z komplex számra $1 + z + z^2 = 0$. Igazoljuk, hogy $z^{65} + z^{-65} = i^{66}$.

4. Mi a mértani helye a komplex számsíkon a $\frac{1+ti}{1-ti}$ alakú számoknak, ha t befutja a valós számok halmazát? Ugyanez a kérdés $\frac{1+ti}{t+i}$-vel?

5. Igazoljuk, hogy ha $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$, akkor $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$.

6. Fejezzük ki $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$ segítségével $\cos n\alpha$-t.

7. Adjunk zárt alakot:

   (a) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$

   (b) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$

8. Legyen ε egy $2n$-edik primitív egységgyök. Számítsuk ki: $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n$-t.

9. Oldjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszereket:

(a)
$$\begin{aligned} a + 3b + c + 4d &= -5 \\ 2a + 3b - 6c &= 4 \\ -a + b + 2c - d &= -6 \\ 3a + 10b + c + d &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + 2y - z - u + v &= -1 \\ x + 2y - z + v &= 1 \\ -x - y + z + 3u - 2v &= 2 \\ 2x + 2y - 2z - 5u + 4v &= -2 \\ 3x + 7y - 3z + u + 2v &= 2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + 9y + 2z - 5u - 3v &= 9 \\ 2y + 3u &= 5 \\ -2x - 4z + u + 6v &= 3 \\ 3x + 5y + 6z + 6u - 9v &= 8 \\ 8y - 6u &= 8 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} a + 2b - 3c + d + e &= 1 \\ a - b + c - 3d - 2e &= -1 \\ 2a + 3b - 2c + d + 4e &= -1 \\ a - 2b + 2c - d &= -1 \\ -3a + b + c + 2d + e &= 1 \end{aligned}$$

10. Mi az összefüggés $A\underline{x} = 0$ és $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldásai között?

11. Legyen $\underline{a} = (7, -5, 1)$ és $\underline{b} = (8, 13, 6)$. Bontsuk fel $\underline{b}$-t egy $\underline{a}$-val párhuzamos és egy $\underline{a}$-ra merőleges összetevőre.

12. (*) Milyen m és n esetén lesz az alábbi ($n \times n$-es) egyenletrendszernek egyértelmű megoldása?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_m &= 1 \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{m+1} &= 1 \\ &\vdots \\ x_n + x_1 + \cdots + x_{m-1} &= 1 \end{aligned}$$

13. (*) Ákos és Bálint egy pénzdarabot dobálnak, a fejdobás valószínűsége p. Ákos az FFI, Béla az II sorozatra vár. Mekkora a valószínűsége, hogy Ákos sorozata következik be előbb?

14. (*) Ákos és Bálint most (egymástól függetlenül) gondol 5-5 egész számot. Ákos megkérdezheti a Bálint által gondolt számok közül bármely kett összegének a paritását, Bálint pedig Ákos számai közül bármely három összegének paritását tudakolhatja meg. Ki tudja-e találni valamelyikük a másik által gondolt számok mindegyikének a paritását, és ha igen, akkor minimálisan hány kérdéssel tudja ezt megtenni?

15. Legyen adott az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz néhány részhalmaza $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Mekkora lehet m, ha $A_i \cap A_j \neq \emptyset$?

16. Definiáljuk egy A halmaz $\underline{k}_A$ karakterisztikus vektorát úgy, hogy az i-ik koordinátája 1, ha $i \in A$, 0 egyébként. Hogyan kahatók meg a karakterisztikus vektorok segítségével a halmazok, illetve a páronkénti metszetek elemszámai?

17. (*) Bizonyítsuk be, hogy ha $|A_i \cap A_j| = k$ minden $1 \leq i < j \leq m$-re, akkor $m \leq n$. *Segítség:* Lássuk be először arra az esetre, ha van i, melyre $|A_i| = k$. Ha ilyen nincs, akkor lássuk be, hogy a karakterisztikus vektorok lineárisan függetlenek.

18. (**) $k = 1$ esetén hogy lehet $m = n$?