1. Adjuk meg az alábbi egyenletekkel megadott S_1, S_2 és S_3 síkok összes metszéspontját a háromdimenziós valós térben.

$$\begin{aligned} S_1: &\quad x + y + z = 6 \\ S_2: &\quad 2x + 3y - 2z = 0 \\ S_3: &\quad 5x + 7y - 3z = 6 \end{aligned}$$

2. Igaz-e, hogy minden véges dimenziós vektortérnek véges sok altere van?

3. Legyenek S_1 és S_2 az n-dimenziós valós tér olyan alterei, melyekre $\forall \mathbf{x} \in S_1$ és $\forall \mathbf{y} \in S_2$ vektorok esetén teljesül, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan független (feltételezve, hogy egyikük sem egyenlő a $\mathbf{0}$ vektorral).

   Legyenek $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)} \in S_1$ lineárisan független vektorok, és $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(m)} \in S_2$ szintén lineárisan független vektorok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(m)}$ vektorokból álló (összesen tehát $(k+m)$ vektort tartalmazó) vektorrendszer is lineárisan független.

4. Adjuk meg az összes olyan $\mathbf{B}$ mátrixot, amire az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   mátrix esetén $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ teljesül.

5. Adjuk meg $Im\mathcal{A}$ és $Ker\mathcal{A}$ egy-egy bázisát, ha az $\mathcal{A}$ lineáris leképezés $\mathbf{A}$ mátrixa a következő:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Hogyan változik meg egy n-szer n-es valós elemű mátrix determinánsa, ha minden elemét az ellentettjére cseréljük?

7. Invertálhatók-e az alábbi mátrixok? Igen válasz esetén az inverzet is adjuk meg!

   a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

   b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (de egymással összeszorozható) $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixra

$$r(\mathbf{AB}) \le \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}.$$

Bevezetés a számításelméletbe I. Zárthelyi feladatok 2001. december 6.

1. Milyen n-ekre lesz valós a $(\sqrt{3} - j)^n$ komplex szám? (A j az imaginárius egységet jelöli.)

2. Adjuk meg p összes lehetséges olyan értékét, amire az alábbi mátrixnak két különböző sajátértéke van! Számítsuk is ki a sajátértékeket $p = 6$ esetén!

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & -3 \end{pmatrix}$$

3. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ olyan négyzetes mátrix, amire $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, akkor $\mathbf{A}$-nak minden sajátértéke 0-val vagy 1-gyel egyenlő.

4. Mennyi az olyan $a_1 a_2 a_3 \ldots$ végtelen számsorozatok halmazának számossága, amelyekre minden $i \geq 1$-re teljesül, hogy az $(a_i + a_{i+1} + a_{i+2})$ összeg osztható 3-mal, és

   a) $\forall i : a_i \in \{0, 1, 2\}$?

   b) $\forall i : a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$?

5. Hányféleképpen osztható egy 30 fős osztály hat ötfős csapatra? (A csapatoknak nincs sorrendje, vagyis két felosztás azonos, ha mindenkinek ugyanazok a csapattársai az egyikben, mint a másikban.)

6. Adjunk meg egy olyan legalább két csúcsú fát, amelynek egyetlen önmagára vonatkozó izomorfizmusa van, az, amely minden csúcshoz önmagát rendeli. (Értelmezési segítség: a két ponton megadható egyetlen fa például nem ilyen, mert két csúcsát felcserélve önmagába megy át.)

7. Egy 32 csúcsú T fa Prüfer-kódjában található 10 darab 1-es, 10 darab 2-es és 10 darab 3-as is. Hány élből áll a T fa leghosszabb útja?

8. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű síkbarajzolható gráf, akkor vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa, vagy tetszőleges síkbarajzolásának van háromoldalú tartománya. (A "vagy"-ot úgy értjük, hogy egyszerre mindkettő is lehetséges.)