A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2014. 10. 20.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak?

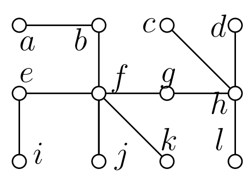
   A G gráfnak 10 csúcsa és 25 éle van, hiszen az élek az 5 páratlan szám mindegyikét az 5 páros szám mindegyikével kötik össze. (2 pont)
   A G minden C_4 részgráfjának csúcsai közül tehát pontosan kettő páros és kettő páratlan, (2 pont)
   ráadásul bárhogyan is választunk ki két páros és két páratlan számot, azok G-nek pontosan egy 4 hosszú köréhez tartoznak. (2 pont)
   Ezek szerint a keresett körök száma éppen annyi, ahányféleképp ki tudunk választani 5 páros és 5 páratlan számból két párosat és két páratlant. (2 pont)
   Mivel a döntéseink egymástól függetlenek, ezt pontosan $\binom{5}{2}^2 = 10 \cdot 10 = 100$-féleképp tehetjük meg. (2 pont)

2. Hányféleképpen lehet sorba rakni az $1, 2, \ldots, 10$ számokat úgy, hogy a sorozat valahányadik eleméig monoton növekedő, onnantól pedig monoton csökkenő legyen? (A két részsorozat határa akár a sorozat első vagy utolsó eleme is lehet.)

   Világos, hogy ha egy sorozat olyan, amilyet a feladat leír, akkor a két monoton részsorozatot elválasztó elem a sorba rakott számok közül a legnagyobb, azaz a 10 lesz. (2 pont)
   Az is világos, hogy a 10 előtti elemek növekvő, a 10 utáni elemek pedig csökkenő sorrendben következnek egymás után a sorozatban. (2 pont)
   Ezért minden ilyen sorozatot egyértelműen meghatároz a 10-et megelőző elemek H halmaza: (1 pont)
   a sorozat a H halmaz elemeinek növekvő sorrendjével kezdődik, a 10-zel folytatódik és a H komplementerének csökkenő sorrendben történő felsorolásával ér véget. (2 pont)
   Ezért a keresett sorozatok száma megegyezik a $\{1, 2, \ldots, 9\}$ halmaz részhalmazainak számával, (1 pont)
   ami 2^9, hisz a 9 elemről egymástól függetlenül döntünk, hogy bevegyük-e H-ba. (1 pont)
   A feladat kérdésére a válasz tehát 2^9. (1 pont)

3. Az ábrán látható a G gráf egy mélységi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c ill. a és e szomszédosak G-ben?

   Azt tanították, hogy a DFS fában nincs keresztél. (3 pont)
   Tehát ha a fa minden élét a gyökértől kifelé irányítjuk, akkor b és c ill. a és e egymás leszármazottai lesznek. (2 pont)
   Ezért a bejárás a fabeli ae útnak először az a vagy az e csúcsát, ill. a fabeli bc útnak először a b vagy a c csúcsát éri el. (1 pont)
   Így e két út unióján elsőnek elért csúcs csak a, e, b vagy c lehetnek. (1 pont)
   Ha e ez a csúcs, akkor a bc út elsőnek elért csúcsa f, ami lehetetlen. Ha b vagy c ez a csúcs, akkor az ae út elsőnek elért csúcsa nem a vagy e. Tehát a mélységi bejárás e két úton először az a csúcsot éri el. (2 pont)
   Azonban a csak az ae útról érhető el a fában, és a DFS innen nem érhette el.
   Ezért csakis a lehetett a bejárás kiindulópontja. (1 pont)

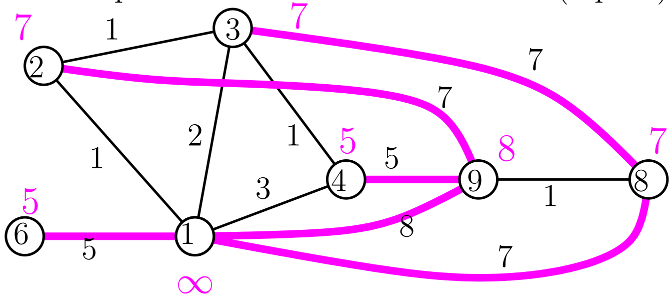
   

   Az is helyes megoldás, ha minden a-n kívüli x csúcsról konkrétan megmutatjuk, hogy keresztél lenne G-ben, ha x lenne a fa gyökere.

4. Legyenek a 7 csúcsú G gráf pontjai $v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8$ és v_9, valamint akkor legyen v_i és v_j szomszédos, ha i és j relatív prímek. Ekkor a v_iv_j él szélessége $|i-j|$. Határozzunk meg a v_1 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legszélesebb utat.

A mellékelt ábrán látható a G gráf és az élek mentén a hosszaik. (4 pont)
A Kruskal algoritmus órán tanult módosításával határozzuk meg a legszélesebb utak fáját, amikoris az éleket csökkenő szélességi sorrendben sorra véve mohón építünk feszítőfát. (4 pont)

Az ábrán megvastagított élek alkotta feszítőfát kapjuk. Ha két csúcs között ezen a fán található út egy legszélesebb út a két csúcs között, ennek megfelelően az egyes csúcsok mellé írt számok a v_1-ből az egyes csúcsokba vezető legszélesebb út szélességét jelentik. (2 pont)



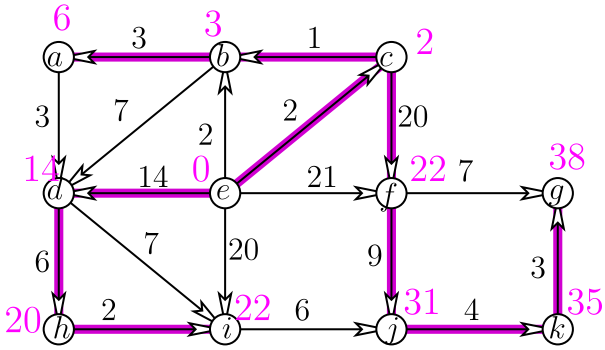
Az utolsó 6 pont megszerezhető az irányított gráfokra tanult, de az irányítatlan gráfokon is működő módszer alkalmazásával is:

Az órán tanult módosított Dijkstra algoritmust hajtjuk végre ezen a gráfon. Minden csúcsra nyilvántartunk egy alsó becslést az odavezető út szélességére, és mindig a KÉSZ halmazba bevett legutolsó csúcsból kiinduló élek mentén javítunk. (3 pont)
Az ábrán minden csúcs mellett az odavezető út szélessége látható és a megvastagított élek alkotta fa pedig a v_1 csúcsból minden más csúcsba egy legszélesebb utat tartalmaz. (3 pont)

Az is teljes értékű megoldás, ha minden egyes v_1-től különböző csúcsra megad a megoldó egy konkrét utat **és arról be is bizonyítja, hogy legszélesebb**.

5. Határozzuk meg az itt látható PERT feladat minimális végrehajtási idejét és a kritikus tevékenységeket.

A megadott gráf csúcsainak $e, c, b, a, d, h, i, f, j, k, g$ egy topologikus sorrendje, így ebben a sorrendben állapítjuk meg az órán tanult módszer szerint a legkorábbi kezdési időket. (4 pont)
Ezeket az időket az egyes csúcsoknál jeleztük, valamint minden egyes csúcsnál megvastatítottuk mindazokat az adott csúcsba befutó éleket, amelyek miatt az adott tevékenység nem kezdődhet a megállapított időpontnál hamarabb. (3 pont)



Az adódott, hogy a feladatot legkorábban $t = 38$-ban lehet befejezni, mégpedig az $ecfjkg$ kritikus út miatt (más kritikus út nincs). Mivel pontosan a kritikus úton található tevékenységek a kritikusak, ezért a feladatbeli kérdés második részére a válasz e, c, f, j, k és g. (3 pont)

6. Tegyük fel, hogy a G gráf bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 7 élű út. Mutassuk meg, hogy ha G-nek van Euler sétája, akkor G-nek megduplázható legfeljebb 7 éle úgy, hogy az így kapott G' gráfnak Euler körsétája legyen. (Egy e él megduplázásán azt értjük, hogy behúzunk egy, az e éllel párhuzamos új élt.)

Az órán tanult tétel értelmében elegendő azt igazolnunk, hogy alkalmasan választott legfeljebb 7 él megduplázása után a kapott G' gráf összefüggő lesz, és minden csúcsának fokszáma páros. (2 pont)
Mivel G összefüggő, hisz bármely két csúcsa közt vezet legfeljebb 7 élű út, ezért bármely, a fenti módon konstruált G' is összefüggő. (2 pont)
Ha G-nek van Euler körsétája, akkor semmi tennivalónk: a $G' = G$ gráf megfelel. (1 pont)
Ha azonban G-nek nincs Euler körsétája, akkor G Euler sétájának u és v végpontjai különbözők. (1 pont)
Ráadásul G-ben u-n és v-n kívül minden csúcs fokszáma páros, míg $d(u)$ és $d(v)$ páratlan. (1 pont)
A feladat feltételeiből tudjuk, hogy u és v között vezet G-ben egy legfeljebb 7 élből álló út. (1 pont)
Ezen út éleit megduplázva a kapott G' gráfban minden csúcs fokszáma páros lesz, így az első megjegyzésünk értelmében az ily módon kapott G' mutatja a feladatbeli állítás igazságát. (2 pont)