A számítástudomány alapjai
II. Pótzárthelyi pontozási útmutató

2013. december 6.

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

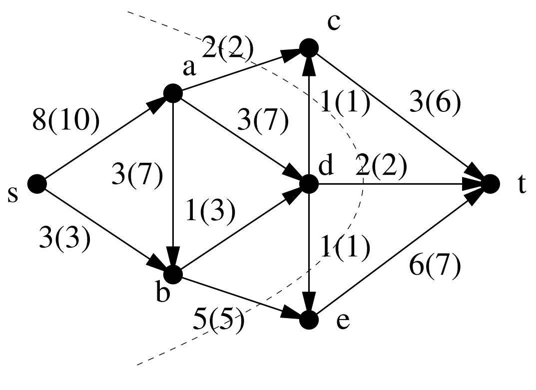
1. Az n pontú egyszerű, összefüggő, pozitív élsúlyokkal rendelkező irányítatlan G gráfban az x és y pontok közötti legrövidebb út hossza s. Az $E' \subset E(G)$ élhalmaz éleit elhagyva a gráf 2 komponensre esik, x az egyik, y a másik komponensbe kerül. E' minden élén növeljük a súlyt 2-vel. Igaz-e, hogy ekkor az x és y pontok közötti legrövidebb út hossza biztosan $s + 2$ lesz?

Nem igaz. Ellenpélda: Legyenek G csúcsai x, z, u és y, élei xz és zy, xu, uz. Az xz és zy élek súlya legyen 1, az xu és uz élek súlya pedig legyen 100. Legyen $E' = \{xz, zy\}$. (Ha valakit nem zavarnak a párhuzamos élek, akkor az xu és uz élek helyett be lehet tenni egy 100 súlyú xz élt is, és az u pont nem is kell.) (6 pont)

Ekkor természetesen a legrövidebb x és y közötti út az xzy, súlya 2. Ha E' éleit elhagyjuk, G két komponensre esik szét, az egyikben van x, u és z, a másikban y. Viszont ha most az xz és zy élek súlyát 3-ra növeljük, akkor a legrövidebb x és y közötti út továbbra is az xzy, de súlya 6. (4 pont)

Megjegyzés: Nyilván minden x és y közötti útnak van E'-höz tartozó éle, ezért minden x és y közötti út súlya (hossza) *legalább* 2-vel nő. Vagyis a legrövidebb út hossza legalább $s + 2$.

2. Mekkora a maximális folyam és a minimális vágás a következő hálózatban?



Az ábrán látható egy 11 értékű folyam (4 pont)

és egy 11 értékű vágás. (4 pont)

Mivel bármelyik folyam erteke legfeljebb annyi, mint bármelyik vágásé, ezért az ábrán látható folyam illetve vágás maximális illetve minimális, tehát a válasz 11. (2 pont)

3. A 2013 pontú egyszerű G gráfban minden pont legalább 1007 fokú. Határozza meg a független élek maximális számát ($\nu(G)$) és a lefogó élek minimális számát ($\rho(G)$)!

Mivel $1007 > 2013/2$, alkalmazhatjuk a Dirac tételt, ennek alapján van G-ben Hamilton-kör. (2 pont)

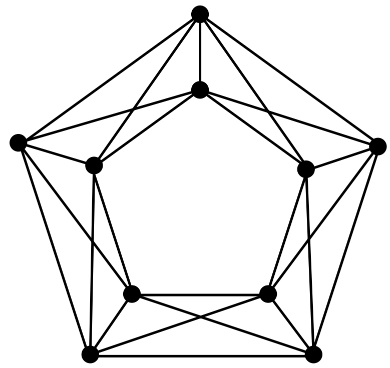
Vegyük ennek minden második élét, ez 1006 darab független él, tehát $\nu \geq 1006$ (2 pont)

Több független él nem lehet, mert 1007 független élnek már összesen 2014 végpontja lenne. (2 pont)

Ezért $\nu = 1006$ (2 pont)

A Gallai tétel alapján pedig $\rho + \nu = 2013$, ezért $\rho = 1007$. (2 pont)

4. Határozza meg a következő ábrán látható gráf kromatikus számát!



Van a gráfban K_4 (1 pont)

ezért $\chi \geq 4$. (1 pont)

Próbáljuk most kiszínezni az 1, 2, 3, 4 színekkel G-t. A rövid élekkel összekötött pontpárokat nevezzük ikrekpároknak. Legyen az egyik ikerpár színe mondjuk 1 és 2. Ekkor a kör mentén mellettük levő ikerpár színe 3 és 4, mivel K_4-et alkotnak. A következő ikerpár színe ugyanezért 1 és 2, a negyedik ikerpáré megint 3 és 4, az ötödiké megint 1 és 2. De ez ellentmondás, mert az első és az ötödik ikerpár is együtt egy K_4-et alkot. (4 pont)

5 színnel viszont ki lehet színezni, a külső kör: 1, 2, 3, 4, 5, a belső: 3, 4, 5, 1, 2. (3 pont)

Tehát a kromatikus szám 4. (1 pont)

5. Legyen G olyan egyszerű síkbarajzolható gráf, melynek bármely síkbarajzolása során minden tartományát legalább 4 él határolja. Mutassa meg, hogy G-ben nem lehet minden pont foka nagyobb, mint 3.

Feltehetük, hogy G összefüggő, ha nem az, akkor bármelyik összefüggő komponensére is teljesül a feltétel, elég azzal foglalkoznunk. (1 pont)

Legyen n, e, t a csúcsok, élek és tartományok száma. Tanultuk, hogy ha minden tartomány mérete legalább 4, akkor $e \leq 2n - 4$. Vagy ha valaki nem tanulta: Legyen $c_1, \ldots, c_t$ az egyes tartományok mérete. Ekkor $2e = c_1 + \cdots + c_t \geq 4t$, tehát $t \leq e/2$. Az Euler formula szerint $n - e + t = 2$, behelyettesítve $n - e + e/2 \geq 2$, $e \leq 2n - 4$. (3 pont)

Tegyük föl, hogy minden pont foka $d_1, d_2, \ldots, d_n$, legalább 4. Ekkor $2e = d_1 + \cdots + d_n \geq 4n$ tehát $e \geq 2n$. (3 pont)

Viszont egyszerre nem lehet $e \leq 2n - 4$ és $e \geq 2n$, ellentmondás, tehát kell lenni olyan csúcsnak, amelynek a foka legfeljebb 3. (3 pont)

6. A G irányított gráfban van olyan él, aminek az elhagyásával a maradékban nincs irányított kör. Igaz-e, hogy a mélységi bejárás során biztosan nem lehet egynél több vissza-él?

Legyenek a G csúcsai x, y, z, irányított élei xy, yz, zy, zx. (4 pont)

Ha elhagyjuk az yz élet, akkor nem lesz irányított kör. (Emeletekre bontható: z, x, y.) (3 pont)

Ugyanakkor, ha x-ből indítunk egy mélységi bejárást, akkor a mélységi fa élei az xy és yz lesznek, két visszaél is van, zy és zx. (3 pont)