A számítástudomány alapjai
I. Pótzárthelyi pontozási útmutató

2013. december 6.

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Egy bolha egységnyi lépéseket tesz meg a számegyenesen pozitív vagy negatív irányban. Hányféleképpen juthat el az origóból 100 lépéssel a 68 pontba?

   Legyen p es n a pozitív illetve a negatív irányba tett lépések száma. Mivel összesen 100 lépést tett meg és összesen 68-cal került arrébb pozitív irányba, $p + n = 100$ és $p - n = 68$. (3 pont)

   Ebből $p = 84$, $n = 16$. (2 pont)

   A bolha egy lehetséges útját úgy adhatjuk meg, hogy megmondjuk, hogy a 100 lépésből melyek voltak a *negatív* lépések. (Vagy azt, hogy melyek voltak a *pozitív* lépések.) (2 pont)

   Tehát $\binom{100}{16} = \binom{100}{84}$ lehetőség van. (3 pont)

2. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképp tehetik ezt meg, ha Morgó nem lehet az utolsó és Kuka közvetlenül Vidor mögött akar állni?

   Mivel Kuka mindenképpen Vidor mögött áll, tekinthetjük őket együtt egy törpének. (3 pont)

   Ha nem vesszük figyelembe Morgó kívánságát, vagyis lehet utolsó is, akkor tehát összesen 6! lehetőség van. (3 pont)

   Ezek közül azon lehetőségek száma, ahol Morgó a sor végén van, 5!. (2 pont)

   Tehát azon lehetőségek száma, ahol Morgó *nem* a sor végén van, $6! - 5! = 600$. (2 pont)

3. Egy rendező-algoritmus elkezdte növekvő sorrendbe rendezni az $A[1 : 256]$ tömb elemeit. (Ha az algoritmus egy elemet áthelyez vagy felcserél, akkor az úgy tekintjük, hogy az A tömbben történik.) Amikor az algoritmus már a teljes rendezés végrehajtásához szükséges összehasonlítások több mint felét elvégezte, egy hiba folytán leáll. Ekkor azt tapasztaljuk, hogy $A[71] > A[70]$. A Buborék-, a bináris keresést használó Beszúrásos- ill. Összefésüléses-rendezések közül melyik lehetett ez az algoritmus?

   Akármelyik lehetett! Ha például az $A[1 : 256]$ tömb eleve rendezve volt, akkor egyik rendező algoritmus sem rendezi át az elemeket. Tehát $A[71] > A[70]$ végig fennáll. (10 pont)

4. Egy kupac tömbös reprezentációja: $v[1 : 31]$. Hány összehasonlítást végez az órán tanult BESZÚR algoritmus akkor, ha egy olyan x elemet szúrunk be a kupacba, melyre $x < v[1]$?

   A kupac egy teljes 5 szintű bináris fa. (1 pont)

   Az x elemet először a 6. szinten helyezzük el. (2 pont)

   Utána fel fog szivárogni a fa gyökerébe. (2 pont)

   Ehhez minden szinten össze kell őt hasonlítani az apjával. (3 pont)

   Tehát összesen 5 összehasonlítás kell. (2 pont)

5. Egy 2013 pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 671. Mutassuk meg, hogy a gráf vagy összefüggő, vagy egyetlen él hozzáadásával azzá tehető.

   Tegyük fel, hogy nem összefüggő, és egy él hozzáadásával nem is tehető összefüggővé. Ekkor legalább 3 összefüggő komponense van. (3 pont)

Ezért a legkisebb összefüggő komponensnek legfeljebb $2013/3 = 671$ pontja van. (4 pont)

Ebben komponensben viszont minden pont fokszáma legfeljebb 670, ami ellentmond a feltételnek. Ezzel beláttuk az állítást. (3 pont)

6. Az n pontú egyszerű, összefüggő, pozitív élsúlyokkal rendelkező G gráfban a minimális feszítőfa összsúlya s. G-ben minden él súlyához hozzáadunk 2-t, így kapjuk a G' gráfot. Mekkora lesz a minimális feszítőfa súlya G'-ben?

A minimális feszítőfának $n-1$ éle van, és a Kruskal (mohó) algoritmussal megkaphatjuk. (2 pont)

A súlyok növelése után az élek súly szerinti sorrendje nem változik, ezért a Kruskal (mohó) algoritmus ugyanúgy fog futni, ugyanazokat az éleket veszi, ugyanabban a sorrendben. (3 pont)

Tehát ugyanaz a feszítőfa itt is minimális lesz. (2 pont)

A súlya $s + 2(n-1)$. (3 pont)