A számítástudomány alapjai
II. Zárthelyi pontozási útmutató

2013. november 28.

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Tudjuk, hogy az $n \geq 20$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $(n+4)/2$. Bizonyítsa be, hogy G-ben van két olyan Hamilton-kör, amelyeknek nincsen közös élük!

Mivel minden fokszám legalább $(n+4)/2 > n/2$, a Dirac tétel szerint G-ben van Hamilton kör. (2 pont)

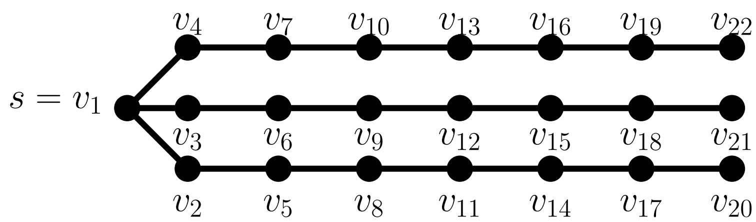
Hagyjuk el G-ből ennek a Hamilton körnek az éleit. (2 pont)

Ezzel minden pont foka pontosan 2-vel csökken. (2 pont)

Tehát a megmaradt gráfban minden fokszám legalább $(n+4)/2-2 = n/2$, vagyis továbbra is teljesül a Dirac feltétel, találhatunk egy újabb Hamilton kört. (3 pont)

Ez természetesen éldiszjunkt az előzőtől. (1 pont)

2. Egy irányítatlan, egyszerű gráf valamely s pontból indított szélességi keresőfája a következő:



A pontokat az ábrán látható sorrendben járta be a keresés. Legfeljebb hány éle lehet az egész gráfnak?

Egy szinten (v_1-ből nézve) három csúcs van, ezek között legfeljebb három él lehet. (1 pont)

Ez összesen $3 \cdot 7 = 21$ él. (1 pont)

Nézzük most az első (v_2, v_3, v_4) és a második (v_5, v_6, v_7) szint közötti lehetséges éleket. A v_2v_6 él nem szerepelhet a gráfban, mert akkor az az él lenne a keresőfában, nem a v_3v_6 él. Ugyanígy, a v_2v_7 és a v_3v_7 élek sem szerepelhetnek a gráfban. (2 pont)

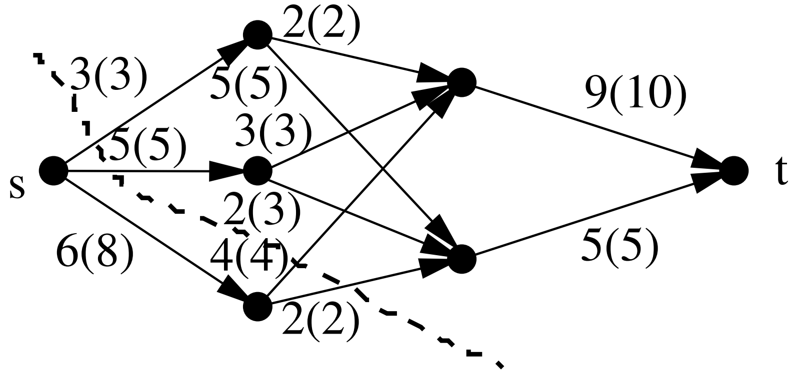
De az összes többi, első és második szint közötti él szerepelhet, ez összesen 6 él. (2 pont)

Ugyanez a helyzet bármelyik két szomszédos szintre, tehát szomszédos szintek közötti él összesen legfeljebb $6 \cdot 6 = 36$ lehet. (1 pont)

Nem szomszédos szintek között nem futhat él, mert akkor az benne lenne a keresőfában. (1 pont)

Van ezen kívül 3 él v_1-ből, tehát összesen legfeljebb $36 + 21 + 3 = 60$ éle lehet a gráfnak. (1 pont)

3. Mekkora a maximális folyam és a minimális vágás a következő hálózatban?



A ábrán látható egy 14 nagyságú folyam, (4 pont)

és egy 14 kapacitású vágás. (4 pont)

Mivel bármelyik folyam nagysága legfeljebb annyi, mint bármelyik vágás kapacitása, ezért az ábrán látható folyam maximális, a vágás pedig minimális. Tehát a válasz 14. (2 pont)

4. Mennyi a független élek maximális száma (ν), a lefogó pontok minimális száma (τ), a független pontok maximális száma (α) és a lefogó élek minimális száma (ρ) abban a gráfban, amit a $K_{13,20}$ teljes páros gráfból egy tetszőleges élének elhagyásával kapunk?

Nagyon könnyű mutatni 13 független élet, tehát $\nu(G) \geq 13$. Ugyanakkor $\nu(G)$ darab független élnek $\nu(G)$ darab különböző végpontja van a 13-as osztályban, ezért $\nu(G) \leq 13$. Vagyis $\nu(G) = 13$. (4 pont)

A Kőnig tétel miatt $\tau(G) = \nu(G) = 13$. (2 pont)

A Gallai tétel miatt $\alpha(G) = n - \tau(G) = 33 - 13 = 20$. (2 pont)

Végül pedig akár a Kőnig ($\rho(G) = \alpha(G)$), akár a Gallai ($\rho(G) = n - \tau(G)$) tétel alapján $\rho(G) = 20$. (2 pont)

5. Egy n csúcsú konvex sokszöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontunk (háromszögeljük). (Ezt mindig többféleképpen is meg lehet tenni.) Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is háromszögelünk, a kapott háromszögelésre gráfként tekintve (csúcsok a sokszög csúcsai, élek a sokszög oldalai és átlói), a kapott gráf kromatikus száma mindig ugyanannyi lesz!

Belátjuk, hogy mindig 3 a kromatikus szám. (1 pont)

A csúcsok számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk, $n = 3$-ra, vagyis egy háromszögre az állítás igaz. (2 pont)

Vegyük az átlók közül az egyik legrövidebbet, ennek az egyik oldalán már egyáltalán nincs átló, mert azok mind rövidebbek lennének. De mivel egy háromszögelésből indultunk ki, ez a legrövidebb átló egy háromszöget vág le a sokszögről. Ennek a harmadik (levágott) v csúcsából nem indul átló. (3 pont)

Hagyjuk el a v csúcsot és a belőle induló két élet. A maradék egy konvex $(n-1)$-szög háromszögelése, az indukciós feltevés alapján kiszínezhető 3 színnel. Tegyük vissza v-t, mivel csak két szomszédja van, ő is kiszínezhető a három szín valamelyikével. (3 pont)

Két szín pedig soha nem elég, mert egy háromszögelésben értelemszerűen mindig van háromszög. (1 pont)

6. Egy 7 pontú teljes gráfból elhagytuk egy Hamilton-körét. Síkbarajzolható lesz-e a maradék gráf?

Azt állítjuk, hogy nem síkbarajzolható a gráf, mutatunk benne egy topologikus $K_{3,3}$-at. (3 pont)

Legyenek az elhagyott Hamilton kör csúcsai, a körön vett sorrendben, $v_1, v_2, \ldots, v_7$. Legyenek v_1, v_2, v_3 az egyik osztály, v_4, v_5, v_6 a másik osztály csúcsai. (2 pont)

Ezeken a csúcsokon valóban található egy topologikus $K_{3,3}$, v_1, v_2, v_3 közül mindegyik össze van kötve v_4, v_5, v_6 közül mindegyikkel a gráfunkban, kivéve v_3 és v_4. Viszont őket meg összeköthetjuk a $v_3v_7v_4$ úttal. Ez tehát egy topologikus $K_{3,3}$, vagyis a gráf nem síkbarajzolható. (5 pont)