A számítástudomány alapjai
I. Zárthelyi pontozási útmutató

2013. október 17.

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol abc 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan lehetséges Neptun-kód van, melyben pontosan két betű és 4 számjegy szerepel?

   $\binom{6}{2}$ helyen lehet a két betű. (Ezzel persze a számok helyét is meghatároztuk.) (3 pont)

   A két betű összesen 26^2–féle lehet. (2 pont)

   A két szám meg 10^4–féle. (2 pont)

   Összesen tehát $\binom{6}{2} \cdot 26^2 \cdot 10^4$ lehetséges Neptun-kód van. (3 pont)

2. Hányféleképpen ültethető le egy köralakú asztal köré 5 házaspár, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni? *(Két ültetést akkor tekintünk azonosnak, ha mindenkinek ugyanaz a baloldali szomszédja a két esetben.)*

   Üljenek le először egy hosszú asztalhoz úgy, hogy a házaspárok egymás mellett ülnek. (2 pont)

   A párok egymás közötti sorrendje 5!–féle lehet. (2 pont)

   Minden pár kétféleképpen ülhet, tehát a hosszú asztal mentén összesen $5! \cdot 2^5$–féle megfelelő ültetés van. (2 pont)

   Most „csukjuk össze” a hosszú asztalt, (vagy küldjük őket ugyanebben a sorrendben a köralakú asztalhoz), így megkapjuk a megfelelő ültetéseket a kör alakú asztalnál, mégpedig mindegyiket pontosan ötször. (2 pont)

   Tehát $5! \cdot 2^5/5 = 4! \cdot 2^5 = 768$ különböző, a feltételeknek megfelelő ültetés van. (2 pont)

3. Adjon példát olyan 10 pozitív egész számot tartalmazó tömbre, amelyenek rendezésekor a *beszúrásos rendezés lineáris kereséssel* kevesebb összehasonlítást végez az *összefésüléses rendezés*nél!

   Legyen $A(i) = i$, $0 \leq i \leq 9$, vagyis már eleve rendezve van. (6 pont)

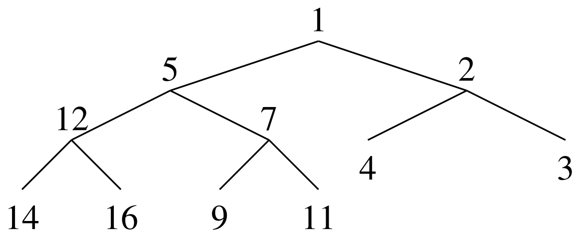
   A beszúrásos rendezésnél minden új elemet az addigiak közül a legnagyobbal hasonítunk össze, az új elem lesz a nagyobb, betesszük a végére. Tehát 9 összehasonlítás kell. (2 pont)

   Az összefésülésnél felbontjuk két ötösre, mindkettőt egy kettesre és egy hármasra, a hármasokat egy egyesre és egy kettesre, végül a ketteseket két egyesre. Tudjuk, hogy egy a és egy b elemű rendezett tömb összefésüléséhez legalább $\min(a, b)$ összehasonlítás kell, a mi esetünkben tehát összesen legalább $6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 5 = 15$. (2 pont)

4. Egy kupacban tárolt elemek POSTORDER szerinti sorrendje: $14, 16, 12, 9, 11, 7, 5, 4, 3, 2, 1$. Adja meg a kupac tömb reprezentációját!

   Mivel ez egy kupac, a fa alakja adott, úgy kaphatjuk meg, hogy egy teljes, 3 mélységű (15 csúcsú) bináris fának a négy jobboldali levelét töröljük. (3 pont)

   A számokat könnyű beírni a csúcsokhoz, 1 a gyökérbe, 2 a jobb fia, 3 annak a jobb fia, 4 a 2 bal fia, stb, lásd az ábrán: (4 pont)



Ebből úgy készül a tömb reprezentáció, hogy felülről lefele szintenként, minden szinten jobbról balra, felírjuk az elemeket: $1, 5, 2, 12, 7, 4, 3, 14, 16, 9, 11$. (3 pont)

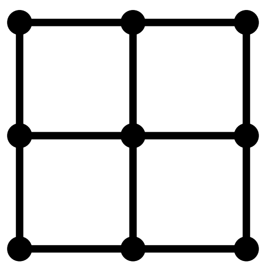
5. Hány olyan páronként nem izomorf 7 pontú fa van, melyben a leghosszabb út hossza (vagyis élszáma) pontosan 4?

A fának 6 éle van, tehát a 4 hosszú (5 pontú) úthoz még két él és két csúcs kell. Tehát vagy egy 2 hosszú utat illesztünk hozzá, vagy két 1 hosszú utat (vagyis élt). (2 pont)

Ha egy 2 hosszú utat illesztünk hozzá, akkor azt csak a 4 hosszú út középső csúcsához illeszthetjük, különben lenne hosszabb út. Ez egy megoldás. (2 pont)

Maradt az az eset, ha két 1 hosszú utat illesztünk a 4 hosszú úthoz. Legyenek a 4 hosszú út csúcsai sorban A, B, C, D és E. A-hoz és E-hez nem illeszthetünk semmit, mert akkor lenne hosszabb utunk. Tehát izomorfia erejeig a következő lehetőségek vannak. (B, B), (B, C), (B, D), (C, C). ((X, Y) azt jelenti, hogy az X és Y csúcsokhoz illesztjük az éleket.) Szóval összesen 5 különböző ilyen fa van. (4 pont)

6. Ennek a 9 pontú, 12 élű gráfnak az élei közül 4 darab költsége 1, 4 darabé 2 és 4 darabé 3. Osszuk szét ezt a 12 költséget a 12 él között úgy, hogy a legkisebb összköltségű feszítőfa összköltsége a lehető legkisebb legyen!



Ennek a gráfnak minden feszítőfája $9 - 1 = 8$ élű. Vegyünk egy tetszőleges T feszítőfát, az élei legyenek az 1 és a 2 súlyú élek, a többi négy él legyen 3 súlyú. Itt a minimális feszítőfa T, súlya $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 12$. (6 pont)

Ugyanakkor tetszőleges súlyozásra, egy feszítőfa 8 éle közül legfeljebb négy 1 súlyú, a többi négy legalább 2 súlyú, ezért az összsúlya legalább 12. Tehát az előbbi súlyozás optimális, vagyis itt a minimális feszítőfa súlya a lehető legkisebb. (4 pont)