Algoritmuselmélet 9. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu

2002 Március 18.

Mélységi feszítőerdő

Legyen T a $G = (V, E)$ irányított gráf egy feszítő erdeje. Legyen $x \in V$ egy tetszőleges csúcs, és jelölje T_x a feszítő erdő x-gyökerű részfájának a csúcshalmazát.

Mélységi feszítőerdő

Legyen T a $G = (V, E)$ irányított gráf egy feszítő erdeje. Legyen $x \in V$ egy tetszőleges csúcs, és jelölje T_x a feszítő erdő x-gyökerű részfájának a csúcshalmazát. Legyen

$$S_x = \left\{ y \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{van olyan } G\text{-beli } x \rightsquigarrow y \text{ irányított út, amelyen} \\ \text{a csúcsok mélységi száma legalább mszám}[x] \end{array} \right\}.$$

Mélységi feszítőerdő

Legyen T a $G = (V, E)$ irányított gráf egy feszítő erdeje. Legyen $x \in V$ egy tetszőleges csúcs, és jelölje T_x a feszítő erdő x-gyökerű részfájának a csúcshalmazát. Legyen

$$S_x = \left\{ y \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{van olyan } G\text{-beli } x \rightsquigarrow y \text{ irányított út, amelyen} \\ \text{a csúcsok mélységi száma legalább mszám}[x] \end{array} \right\}.$$

Tétel. *Tetszőleges $x \in V$ csúcs esetén érvényes a $T_x = S_x$ egyenlőség.*

Tétel. *Tetszőleges* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ *csúcs esetén érvényes a* $\boldsymbol{T_x} = \boldsymbol{S_x}$ *egyenlőség.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{T_x}$ éppen azokból a pontokból áll, amelyek $\boldsymbol{x}$-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám

Tétel. *Tetszőleges* $x \in V$ *csúcs esetén érvényes a* $T_x = S_x$ *egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow T_x \subseteq S_x$

Tétel. *Tetszőleges* $x \in V$ *csúcs esetén érvényes a* $T_x = S_x$ *egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:

Tétel. *Tetszőleges* $x \in V$ *csúcs esetén érvényes a* $T_x = S_x$ *egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:
tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $y \in S_x \setminus T_x$

Tétel. *Tetszőleges $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ csúcs esetén érvényes a $\boldsymbol{T_x} = \boldsymbol{S_x}$ egyenlőség.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{T_x}$ éppen azokból a pontokból áll, amelyek $\boldsymbol{x}$-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow \boldsymbol{T_x} \subseteq \boldsymbol{S_x}$

Fordított irány indirekt:
tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S_x} \setminus \boldsymbol{T_x}$
Legyen $\boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{y}$ egy az $\boldsymbol{S_x}$ meghatározásában szereplő irányított út, feltehetjük, hogy az út utolsó előtti $\boldsymbol{v}$ pontja $\boldsymbol{T_x}$-ben van.

Tétel. *Tetszőleges* $x \in V$ *csúcs esetén érvényes a* $T_x = S_x$ *egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:
tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $y \in S_x \setminus T_x$
Legyen $x \rightsquigarrow y$ egy az S_x meghatározásában szereplő irányított út, feltehetjük, hogy az út utolsó előtti v pontja T_x-ben van.
Az $y \in S_x$ feltétel szerint mszám$[y] >$mszám$[x]$

Tétel. *Tetszőleges* $x \in V$ *csúcs esetén érvényes a* $T_x = S_x$ *egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\implies$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\implies T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:
tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $y \in S_x \setminus T_x$
Legyen $x \rightsquigarrow y$ egy az S_x meghatározásában szereplő irányított út, feltehetjük, hogy az út utolsó előtti v pontja T_x-ben van.
Az $y \in S_x$ feltétel szerint mszám$[y] >$mszám$[x] \implies y \notin T_x$ miatt azt jelenti, hogy y-t valamikor a T_x pontjai után látogatjuk meg

Tétel. *Tetszőleges $x \in V$ csúcs esetén érvényes a $T_x = S_x$ egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:
tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $y \in S_x \setminus T_x$
Legyen $x \rightsquigarrow y$ egy az S_x meghatározásában szereplő irányított út, feltehetjük, hogy az út utolsó előtti v pontja T_x-ben van.
Az $y \in S_x$ feltétel szerint mszám$[y]$ $>$mszám$[x]$ $\Longrightarrow y \notin T_x$ miatt azt jelenti, hogy y-t valamikor a T_x pontjai után látogatjuk meg $\Longrightarrow (v, y)$ faél vagy előre él $\Longrightarrow y \in T_x$

Tétel. *Tetszőleges* $x \in V$ *csúcs esetén érvényes a* $T_x = S_x$ *egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:
tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $y \in S_x \setminus T_x$
Legyen $x \rightsquigarrow y$ egy az S_x meghatározásában szereplő irányított út, feltehetjük, hogy az út utolsó előtti v pontja T_x-ben van.
Az $y \in S_x$ feltétel szerint mszám$[y]$ $>$mszám$[x]$ $\Longrightarrow y \notin T_x$ miatt azt jelenti, hogy y-t valamikor a T_x pontjai után látogatjuk meg $\Longrightarrow (v, y)$ faél vagy előre él $\Longrightarrow y \in T_x \Longrightarrow S_x \subseteq T_x$ $\checkmark$

Tétel. *Tetszőleges* $x \in V$ *csúcs esetén érvényes a* $T_x = S_x$ *egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:
tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $y \in S_x \setminus T_x$
Legyen $x \leadsto y$ egy az S_x meghatározásában szereplő irányított út, feltehetjük, hogy az út utolsó előtti v pontja T_x-ben van.
Az $y \in S_x$ feltétel szerint mszám$[y]$ $>$mszám$[x]$ $\Longrightarrow y \notin T_x$ miatt azt jelenti, hogy y-t valamikor a T_x pontjai után látogatjuk meg $\Longrightarrow (v, y)$ faél vagy előre él $\Longrightarrow y \in T_x \Longrightarrow S_x \subseteq T_x$ $\checkmark$

Következmény. *Tegyük fel, hogy a* $G = (V, E)$ *gráf* x *csúcsából minden pont elérhető irányított úton. Tegyük fel továbbá, hogy a* G *mélységi bejárását* x*-szel kezdjük. Ekkor a mélységi feszítő erdő egyetlen fából áll.*

Tétel. *Tetszőleges $x \in V$ csúcs esetén érvényes a $T_x = S_x$ egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\implies$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\implies T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:
tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $y \in S_x \setminus T_x$
Legyen $x \rightsquigarrow y$ egy az S_x meghatározásában szereplő irányított út, feltehetjük, hogy az út utolsó előtti v pontja T_x-ben van.
Az $y \in S_x$ feltétel szerint mszám$[y]$ >mszám$[x]$ $\implies y \notin T_x$ miatt azt jelenti, hogy y-t valamikor a T_x pontjai után látogatjuk meg $\implies (v, y)$ faél vagy előre él $\implies y \in T_x \implies S_x \subseteq T_x$ $\checkmark$

Következmény. *Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf x csúcsából minden pont elérhető irányított úton. Tegyük fel továbbá, hogy a G mélységi bejárását x-szel kezdjük. Ekkor a mélységi feszítő erdő egyetlen fából áll.*

Bizonyítás: mszám$[x] = 1 \implies S_x = V$

Tétel. *Tetszőleges $x \in V$ csúcs esetén érvényes a $T_x = S_x$ egyenlőség.*

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. $\Longrightarrow$ faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:
tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $y \in S_x \setminus T_x$
Legyen $x \rightsquigarrow y$ egy az S_x meghatározásában szereplő irányított út, feltehetjük, hogy az út utolsó előtti v pontja T_x-ben van.
Az $y \in S_x$ feltétel szerint mszám$[y]$ >mszám$[x]$ $\Longrightarrow y \notin T_x$ miatt azt jelenti, hogy y-t valamikor a T_x pontjai után látogatjuk meg $\Longrightarrow (v, y)$ faél vagy előre él $\Longrightarrow y \in T_x \Longrightarrow S_x \subseteq T_x$ $\checkmark$

Következmény. *Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf x csúcsából minden pont elérhető irányított úton. Tegyük fel továbbá, hogy a G mélységi bejárását x-szel kezdjük. Ekkor a mélységi feszítő erdő egyetlen fából áll.*

Bizonyítás: mszám$[x] = 1 \Longrightarrow S_x = V \Longrightarrow T_x = V$

Irányított körmentes gráfok

Definíció. *Egy G irányított gráf* DAG*, ha nem tartalmaz irányított kört.*

Irányított körmentes gráfok

Definíció. *Egy G irányított gráf* DAG*, ha nem tartalmaz irányított kört.*

Directed Acyclic Graph

Irányított körmentes gráfok

Definíció. *Egy G irányított gráf* DAG*, ha nem tartalmaz irányított kört.*

Directed Acyclic Graph

Alkalmazásai például:

- Teendők ütemezése

Irányított körmentes gráfok

Definíció. *Egy G irányított gráf* DAG*, ha nem tartalmaz irányított kört.*

Directed Acyclic Graph

Alkalmazásai például:

- Teendők ütemezése $\Longrightarrow$ PERT

Irányított körmentes gráfok

Definíció. *Egy G irányított gráf* DAG*, ha nem tartalmaz irányított kört.*

Directed Acyclic Graph

Alkalmazásai például:

- Teendők ütemezése $\Longrightarrow$ PERT
- Várakozási gráfok

Irányított körmentes gráfok

Definíció. *Egy G irányított gráf* DAG*, ha nem tartalmaz irányított kört.*

Directed Acyclic Graph

Alkalmazásai például:

- Teendők ütemezése $\Longrightarrow$ PERT
- Várakozási gráfok $\Longrightarrow$ adatbázisok

Irányított körmentes gráfok

Definíció. *Egy G irányított gráf* DAG, *ha nem tartalmaz irányított kört.*

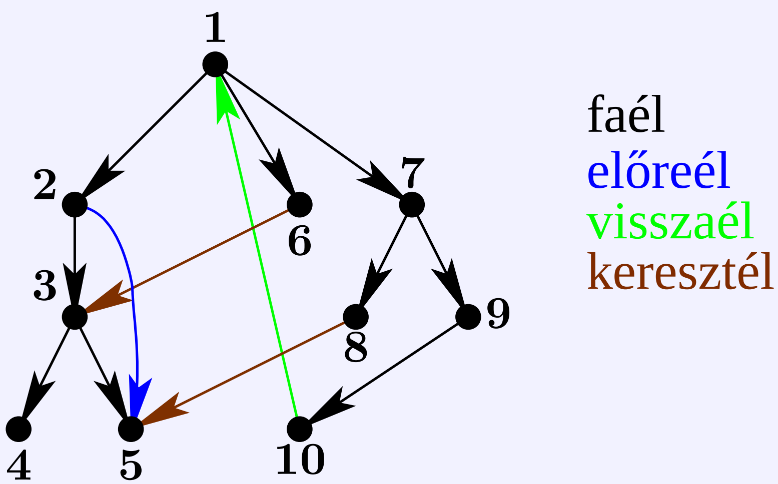
Directed Acyclic Graph

Alkalmazásai például:

- Teendők ütemezése $\Longrightarrow$ PERT
- Várakozási gráfok $\Longrightarrow$ adatbázisok

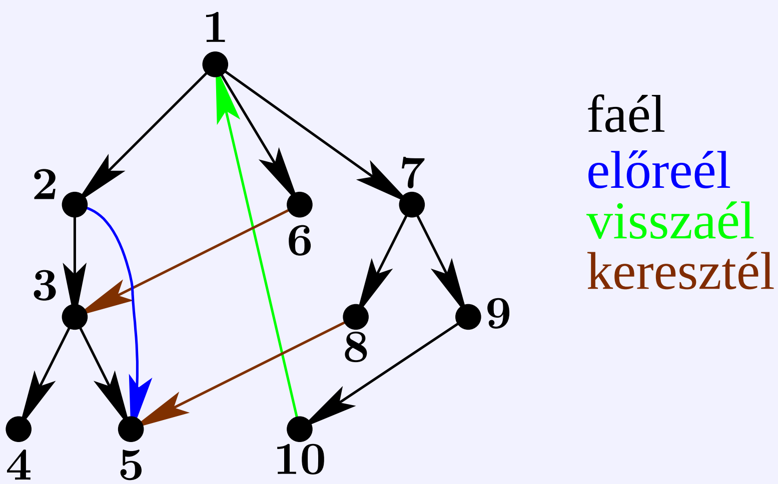
Fontos, hogy egy irányított gráfról el tudjuk dönteni, tartalmaz-e irányított kört.

DAG



Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

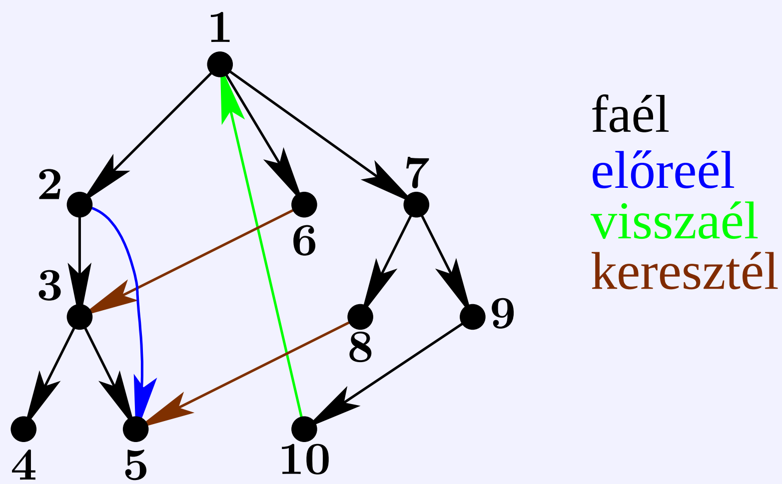
DAG



Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel. *Legyen* $G = (V, E)$ *egy irányított gráf. Ha* G *egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva: ha* G*-nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor* G *egy DAG.*

DAG

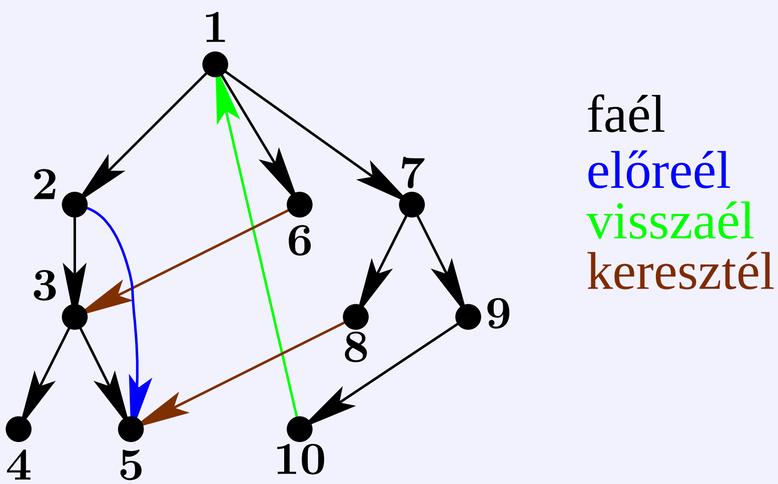


Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel. *Legyen* $G = (V, E)$ *egy irányított gráf. Ha* G *egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva: ha* G*-nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor* G *egy DAG.*

Bizonyítás: $\Longrightarrow$ $\checkmark$

DAG



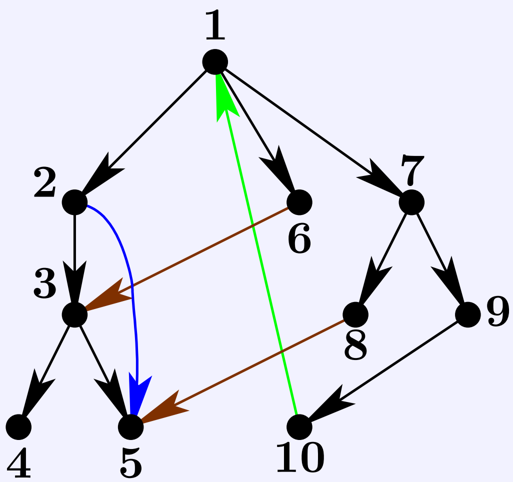
Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel. *Legyen* $G = (V, E)$ *egy irányított gráf. Ha* G *egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva: ha* G*-nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor* G *egy DAG.*

Bizonyítás: $\Longrightarrow$ $\surd$

$\Longleftarrow$ tegyük fel, hogy G nem DAG

DAG



faél
előreél
visszaél
keresztél

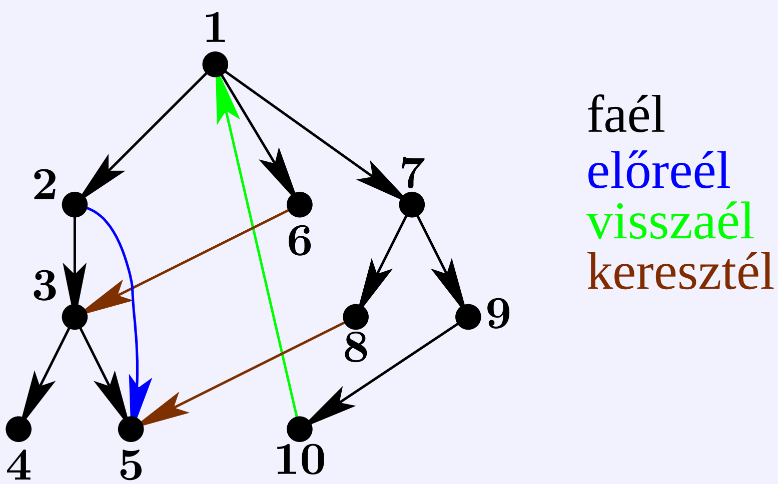
Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel. *Legyen* $G = (V, E)$ *egy irányított gráf. Ha* G *egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva: ha* G*-nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor* G *egy DAG.*

Bizonyítás: $\Longrightarrow$ $\surd$

$\Longleftarrow$ tegyük fel, hogy G nem DAG $\Longrightarrow$ van benne irányított kör

DAG



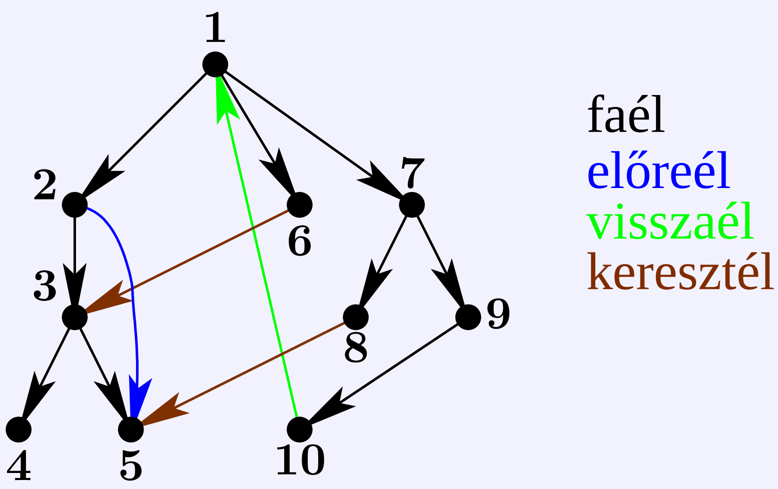
Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel. *Legyen* $G = (V, E)$ *egy irányított gráf. Ha* G *egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva: ha* G*-nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor* G *egy DAG.*

Bizonyítás: $\Longrightarrow$ $\checkmark$

$\Longleftarrow$ tegyük fel, hogy G nem DAG $\Longrightarrow$ van benne irányított kör $\Longrightarrow$ vegyük ennek a legkisebb mélységi számú v csúcsát, a kör előző pontja legyen u

DAG



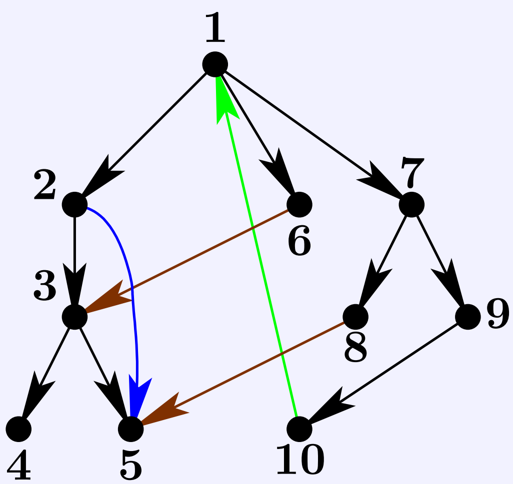
Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel. *Legyen* $G = (V, E)$ *egy irányított gráf. Ha* G *egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva: ha* G*-nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor* G *egy DAG.*

Bizonyítás: $\Longrightarrow$ $\surd$

$\Longleftarrow$ tegyük fel, hogy G nem DAG $\Longrightarrow$ van benne irányított kör $\Longrightarrow$ vegyük ennek a legkisebb mélységi számú v csúcsát, a kör előző pontja legyen u $\Longrightarrow$ mszám$[v]$ $<$ mszám$[u]$ $\Longrightarrow$ vissza- vagy keresztél

DAG



Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel. *Legyen* $G = (V, E)$ *egy irányított gráf. Ha* G *egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva: ha* G*-nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor* G *egy DAG.*

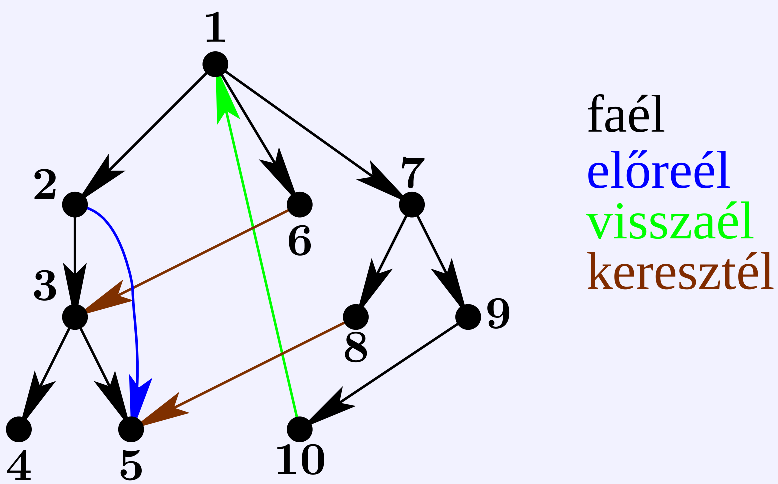
Bizonyítás: $\Longrightarrow$ $\surd$

$\Longleftarrow$ tegyük fel, hogy G nem DAG $\Longrightarrow$ van benne irányított kör $\Longrightarrow$ vegyük ennek a legkisebb mélységi számú v csúcsát, a kör előző pontja legyen u

$\Longrightarrow$ mszám$[v] <$ mszám$[u]$ $\Longrightarrow$ vissza- vagy keresztél

de u elérhető v-ből irányított úton

DAG



Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf. Ha G egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva: ha G-nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor G egy DAG.*

Bizonyítás: $\Longrightarrow$ $\checkmark$

$\Longleftarrow$ tegyük fel, hogy G nem DAG $\Longrightarrow$ van benne irányított kör $\Longrightarrow$ vegyük ennek a legkisebb mélységi számú v csúcsát, a kör előző pontja legyen u

$\Longrightarrow$ mszám$[v] <$ mszám$[u]$ $\Longrightarrow$ vissza- vagy keresztél

de u elérhető v-ből irányított úton ; (részfa lemma) $\Longrightarrow$ u a v leszármazottja

$\Longrightarrow$ visszaél $\checkmark$

DAG topologikus rendezése

Definíció. *Legyen* $G = (V, E)$ *(*$|V| = n$*) egy irányított gráf.* G *egy* topologikus rendezése *a csúcsoknak egy olyan* $v_1, \ldots, v_n$ *sorrendje, melyben* $x \to y \in E$ *esetén* x *előbb van, mint* y *(azaz ha* $x = v_i, y = v_j$*, akkor* $i < j$*).*

DAG topologikus rendezése

Definíció. *Legyen* $G = (V, E)$ *(*$|V| = n$*) egy irányított gráf.* G *egy* topologikus rendezése *a csúcsoknak egy olyan* $v_1, \ldots, v_n$ *sorrendje, melyben* $x \rightarrow y \in E$ *esetén* x *előbb van, mint* y *(azaz ha* $x = v_i, y = v_j$*, akkor* $i < j$*).*

Tétel. *Egy irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha DAG.*

DAG topologikus rendezése

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ ($|V| = n$) egy irányított gráf. G egy* topologikus rendezése *a csúcsoknak egy olyan $v_1, \ldots, v_n$ sorrendje, melyben $x \to y \in E$ esetén x előbb van, mint y (azaz ha $x = v_i, y = v_j$, akkor $i < j$).*
Tétel. *Egy irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha DAG.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$**:** Ha G nem DAG, akkor nem lehet topologikus rendezése, mert egy irányított kör csúcsainak nyilván nincs megfelelő sorrendje.

DAG topologikus rendezése

Definíció. *Legyen* $G = (V, E)$ *(*$|V| = n$*) egy irányított gráf.* G *egy* topologikus rendezése *a csúcsoknak egy olyan* $v_1, \ldots, v_n$ *sorrendje, melyben* $x \to y \in E$ *esetén* x *előbb van, mint* y *(azaz ha* $x = v_i, y = v_j$*, akkor* $i < j$*).*
Tétel. *Egy irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha DAG.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$**:** Ha G nem DAG, akkor nem lehet topologikus rendezése, mert egy irányított kör csúcsainak nyilván nincs megfelelő sorrendje.

$\Leftarrow$**:** G-ben van olyan csúcs, amibe nem fut be él (forrás)

DAG topologikus rendezése

Definíció. *Legyen* $G = (V, E)$ *(*$|V| = n$*) egy irányított gráf.* G *egy* topologikus rendezése *a csúcsoknak egy olyan* $v_1, \ldots, v_n$ *sorrendje, melyben* $x \to y \in E$ *esetén* x *előbb van, mint* y *(azaz ha* $x = v_i, y = v_j$*, akkor* $i < j$*).*
Tétel. *Egy irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha DAG.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$**:** Ha G nem DAG, akkor nem lehet topologikus rendezése, mert egy irányított kör csúcsainak nyilván nincs megfelelő sorrendje.

$\Leftarrow$**:** G-ben van olyan csúcs, amibe nem fut be él (forrás)
Indukció pontszámra

DAG topologikus rendezése

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ ($|V| = n$) egy irányított gráf. G egy* topologikus rendezése *a csúcsoknak egy olyan $v_1, \ldots, v_n$ sorrendje, melyben $x \to y \in E$ esetén x előbb van, mint y (azaz ha $x = v_i, y = v_j$, akkor $i < j$).*

Tétel. *Egy irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha DAG.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$**:** Ha G nem DAG, akkor nem lehet topologikus rendezése, mert egy irányított kör csúcsainak nyilván nincs megfelelő sorrendje.

$\Leftarrow$**:** G-ben van olyan csúcs, amibe nem fut be él (forrás)
Indukció pontszámra $\Longrightarrow$ hagyjunk el egy forrást, ez legyen az első pont

DAG topologikus rendezése

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ ($|V| = n$) egy irányított gráf. G egy* topologikus rendezése *a csúcsoknak egy olyan $v_1, \dots, v_n$ sorrendje, melyben $x \to y \in E$ esetén x előbb van, mint y (azaz ha $x = v_i, y = v_j$, akkor $i < j$).*

Tétel. *Egy irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha DAG.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$**:** Ha G nem DAG, akkor nem lehet topologikus rendezése, mert egy irányított kör csúcsainak nyilván nincs megfelelő sorrendje.

$\Leftarrow$**:** G-ben van olyan csúcs, amibe nem fut be él (forrás)
Indukció pontszámra $\Longrightarrow$ hagyjunk el egy forrást, ez legyen az első pont
$\Longrightarrow$ a többbit az indukció miatt rendezhető $w_1, \dots, w_{n-1}$

DAG topologikus rendezése

Definíció. *Legyen* $G = (V, E)$ *(*$|V| = n$*) egy irányított gráf.* G *egy* topologikus rendezése *a csúcsoknak egy olyan* $v_1, \ldots, v_n$ *sorrendje, melyben* $x \to y \in E$ *esetén* x *előbb van, mint* y *(azaz ha* $x = v_i, y = v_j$*, akkor* $i < j$*).*

Tétel. *Egy irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha DAG.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$**:** Ha G nem DAG, akkor nem lehet topologikus rendezése, mert egy irányított kör csúcsainak nyilván nincs megfelelő sorrendje.

$\Leftarrow$**:** G-ben van olyan csúcs, amibe nem fut be él (forrás)
Indukció pontszámra $\implies$ hagyjunk el egy forrást, ez legyen az első pont
$\implies$ a többbit az indukció miatt rendezhető $w_1, \ldots, w_{n-1}$
$\implies x, w_1, \ldots, w_{n-1}$ $\checkmark$

Topologikus rendezés mélységi kereséssel

Tétel. *Végezzük el a G DAG egy mélységi bejárását és írjuk ki G csúcsait a befejezési számaik szerint növekvő $w_1, \ldots, w_n$ sorrendben. A $w_n, w_{n-1}, \ldots, w_1$ sorrend a G DAG egy topologikus rendezése.*

Topologikus rendezés mélységi kereséssel

Tétel. *Végezzük el a G DAG egy mélységi bejárását és írjuk ki G csúcsait a befejezési számaik szerint növekvő $w_1, \dots, w_n$ sorrendben. A $w_n, w_{n-1}, \dots, w_1$ sorrend a G DAG egy topologikus rendezése.*

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy ha $w_i \longrightarrow w_j$ éle G-nek, akkor $i > j$.

Topologikus rendezés mélységi kereséssel

Tétel. *Végezzük el a G DAG egy mélységi bejárását és írjuk ki G csúcsait a befejezési számaik szerint növekvő $w_1, \ldots, w_n$ sorrendben. A $w_n, w_{n-1}, \ldots, w_1$ sorrend a G DAG egy topologikus rendezése.*

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy ha $w_i \longrightarrow w_j$ éle G-nek, akkor $i > j$. Ha volna olyan $w_i \longrightarrow w_j$, amire $j = \text{bszám}[w_j] > \text{bszám}[w_i] = i$, akkor az csak visszaél lehetne. ↯

Topologikus rendezés mélységi kereséssel

Tétel. *Végezzük el a G DAG egy mélységi bejárását és írjuk ki G csúcsait a befejezési számaik szerint növekvő $w_1, \ldots, w_n$ sorrendben. A $w_n, w_{n-1}, \ldots, w_1$ sorrend a G DAG egy topologikus rendezése.*

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy ha $w_i \longrightarrow w_j$ éle G-nek, akkor $i > j$.
Ha volna olyan $w_i \longrightarrow w_j$, amire $j = \text{bszám}[w_j] > \text{bszám}[w_i] = i$, akkor az csak visszaél lehetne. $\lightning$

Lépésszám: $O(n + e)$

Legrövidebb utak DAG-ban

Legrövidebb utak egy forrásból:
Bellman-Ford $\Longrightarrow$ $O(n^3)$

Legrövidebb utak DAG-ban

Legrövidebb utak egy forrásból:

Bellman-Ford $\Longrightarrow \boldsymbol{O(n^3)}$

Ha nincs negatív élsúly:

Dijkstra: $\Longrightarrow \boldsymbol{O(n^2)}$

Legrövidebb utak DAG-ban

Legrövidebb utak egy forrásból:
Bellman-Ford $\Longrightarrow O(n^3)$
Ha nincs negatív élsúly:
Dijkstra: $\Longrightarrow O(n^2)$
Vegyünk egy topologikus rendezést: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Legrövidebb utak DAG-ban

Legrövidebb utak egy forrásból:
Bellman-Ford $\Longrightarrow$ $O(n^3)$
Ha nincs negatív élsúly:
Dijkstra: $\Longrightarrow$ $O(n^2)$
Vegyünk egy topologikus rendezést: $x_1, x_2, \dots, x_n$
Feltehetjük, hogy $s = x_1$

Legrövidebb utak DAG-ban

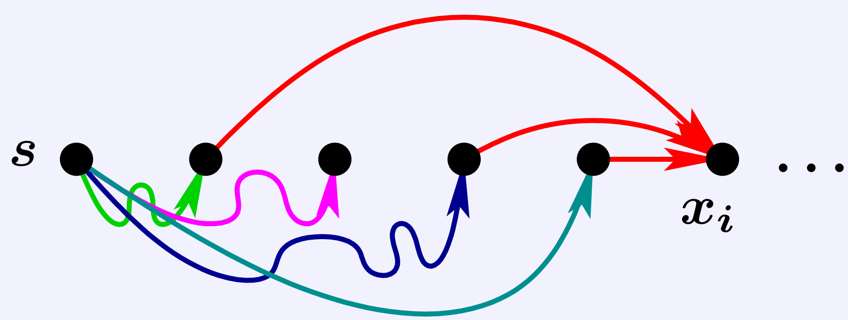
Legrövidebb utak egy forrásból:
Bellman-Ford $\Longrightarrow$ $O(n^3)$
Ha nincs negatív élsúly:
Dijkstra: $\Longrightarrow$ $O(n^2)$
Vegyünk egy topologikus rendezést: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Feltehetjük, hogy $s = x_1 \Longrightarrow$

$$d(s, x_i) = \min_{(x_j, x_i) \in E} \{d(s, x_j) + c(x_j, x_i)\},$$

Legrövidebb utak DAG-ban

Legrövidebb utak egy forrásból:
Bellman-Ford $\Longrightarrow$ $O(n^3)$
Ha nincs negatív élsúly:
Dijkstra: $\Longrightarrow$ $O(n^2)$
Vegyünk egy topologikus rendezést: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Feltehetjük, hogy $s = x_1$ $\Longrightarrow$

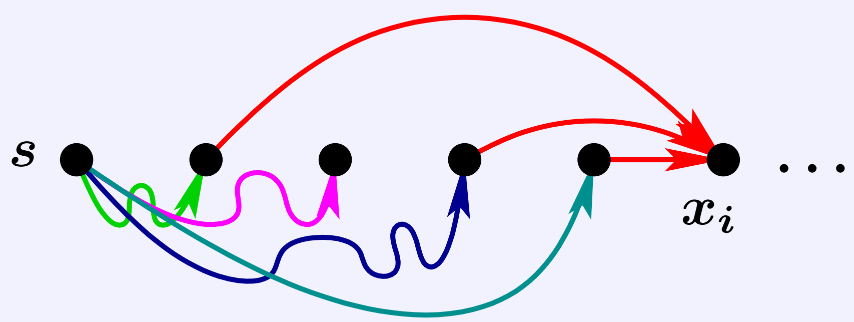
$$d(s, x_i) = \min_{(x_j, x_i) \in E} \{d(s, x_j) + c(x_j, x_i)\},$$



Legrövidebb utak DAG-ban

Legrövidebb utak egy forrásból:
Bellman-Ford $\Longrightarrow O(n^3)$
Ha nincs negatív élsúly:
Dijkstra: $\Longrightarrow O(n^2)$
Vegyünk egy topologikus rendezést: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Feltehetjük, hogy $s = x_1 \Longrightarrow$

$$d(s, x_i) = \min_{(x_j, x_i) \in E} \{d(s, x_j) + c(x_j, x_i)\},$$

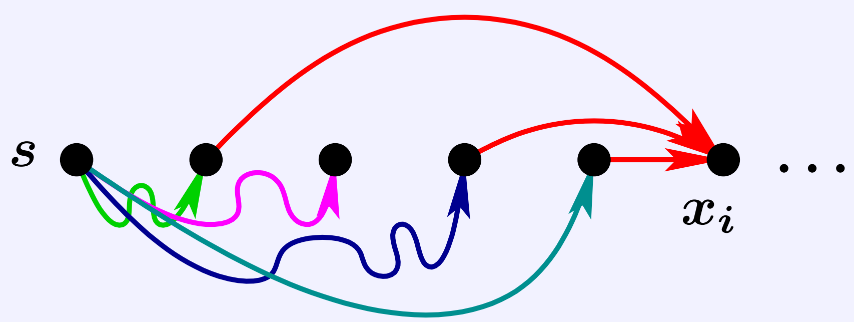


Ezt sorban elvégezzük minden i-re.

Legrövidebb utak DAG-ban

Legrövidebb utak egy forrásból:
Bellman-Ford $\Longrightarrow O(n^3)$
Ha nincs negatív élsúly:
Dijkstra: $\Longrightarrow O(n^2)$
Vegyünk egy topologikus rendezést: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Feltehetjük, hogy $s = x_1 \Longrightarrow$

$$d(s, x_i) = \min_{(x_j, x_i) \in E} \{d(s, x_j) + c(x_j, x_i)\},$$



Ezt sorban elvégezzük minden i-re.

Lépésszám: $O(n + e)$

Leghosszabb utak DAG-ban

Leghosszabb út $\Longrightarrow$ egyszerű út

Leghosszabb utak DAG-ban

Leghosszabb út $\Longrightarrow$ egyszerű út
Általában nehéz, nem ismert rá gyors algoritmus.

Leghosszabb utak DAG-ban

Leghosszabb út $\Longrightarrow$ egyszerű út
Általában nehéz, nem ismert rá gyors algoritmus.

DAG-ban van:
Tétel. *Ha G egy éllistával adott súlyozott élű DAG, akkor az egy forrásból induló legrövidebb és leghosszabb utak meghatározásának feladatai $O(n+e)$ lépésben megoldhatók.*

Leghosszabb utak DAG-ban

Leghosszabb út $\Longrightarrow$ egyszerű út
Általában nehéz, nem ismert rá gyors algoritmus.

DAG-ban van:
Tétel. *Ha G egy éllistával adott súlyozott élű DAG, akkor az egy forrásból induló legrövidebb és leghosszabb utak meghatározásának feladatai $O(n+e)$ lépésben megoldhatók.*

Bizonyítás: DAG-ban minden út csak előre megy

Leghosszabb utak DAG-ban

Leghosszabb út $\Longrightarrow$ egyszerű út
Általában nehéz, nem ismert rá gyors algoritmus.

DAG-ban van:
Tétel. *Ha G egy éllistával adott súlyozott élű DAG, akkor az egy forrásból induló legrövidebb és leghosszabb utak meghatározásának feladatai $O(n+e)$ lépésben megoldhatók.*

Bizonyítás: DAG-ban minden út csak előre megy $\Longrightarrow$

$$l(s, x_i) = \max_{(x_j, x_i) \in E} \{l(s, x_j) + c(x_j, x_i)\}.$$

ahol $l(s, x_i)$ a leghosszabb $s \rightsquigarrow x_i$ út hossza

Leghosszabb utak DAG-ban

Leghosszabb út $\Longrightarrow$ egyszerű út
Általában nehéz, nem ismert rá gyors algoritmus.

DAG-ban van:
Tétel. *Ha G egy éllistával adott súlyozott élű DAG, akkor az egy forrásból induló legrövidebb és leghosszabb utak meghatározásának feladatai $O(n+e)$ lépésben megoldhatók.*

Bizonyítás: DAG-ban minden út csak előre megy $\Longrightarrow$

$$l(s, x_i) = \max_{(x_j, x_i) \in E} \{l(s, x_j) + c(x_j, x_i)\}.$$

ahol $l(s, x_i)$ a leghosszabb $s \rightsquigarrow x_i$ út hossza

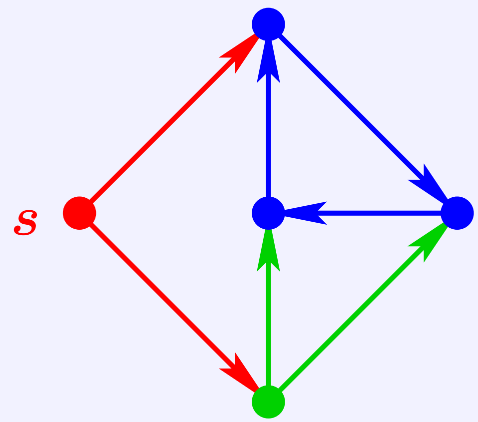
Alkalmazás: PERT

Erősen összefüggő (erős) komponensek

Definíció. *Egy* $G = (V, E)$ *irányított gráf* erősen összefüggő*, ha bármely* $u, v \in V$ *pontpárra létezik* $u \rightsquigarrow v$ *irányított út.*

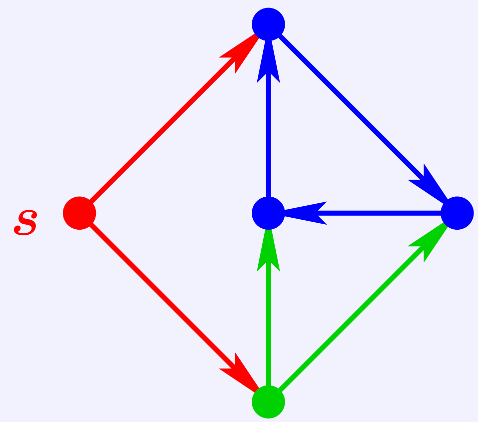
Erősen összefüggő (erős) komponensek

Definíció. *Egy* $G = (V, E)$ *irányított gráf* erősen összefüggő*, ha bármely* $u, v \in V$ *pontpárra létezik* $u \rightsquigarrow v$ *irányított út.*



Erősen összefüggő (erős) komponensek

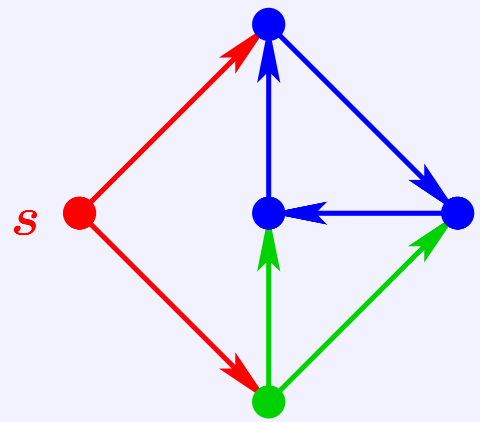
Definíció. *Egy $G = (V, E)$ irányított gráf* erősen összefüggő*, ha bármely $u, v \in V$ pontpárra létezik $u \rightsquigarrow v$ irányított út.*



Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf. Bevezetünk egy relációt V-n: $u, v \in V$-re legyen $u \approx v$, ha G-ben léteznek $u \rightsquigarrow v$ és $v \rightsquigarrow u$ irányított utak.*

Erősen összefüggő (erős) komponensek

Definíció. *Egy $G = (V, E)$ irányított gráf* erősen összefüggő*, ha bármely $u, v \in V$ pontpárra létezik $u \rightsquigarrow v$ irányított út.*

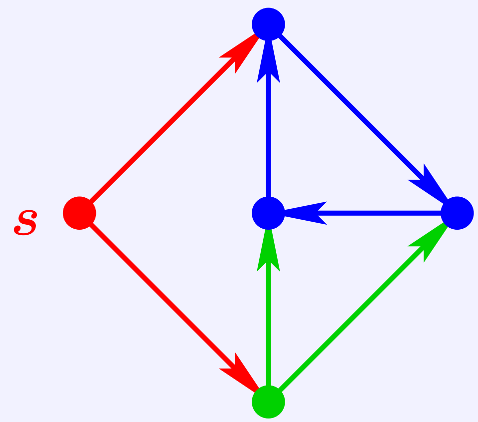


Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf. Bevezetünk egy relációt V-n: $u, v \in V$-re legyen $u \approx v$, ha G-ben léteznek $u \rightsquigarrow v$ és $v \rightsquigarrow u$ irányított utak.*

Ez ekvivalenciareláció $\Longrightarrow$

Erősen összefüggő (erős) komponensek

Definíció. *Egy* $G = (V, E)$ *irányított gráf* erősen összefüggő, *ha bármely* $u, v \in V$ *pontpárra létezik* $u \rightsquigarrow v$ *irányított út.*

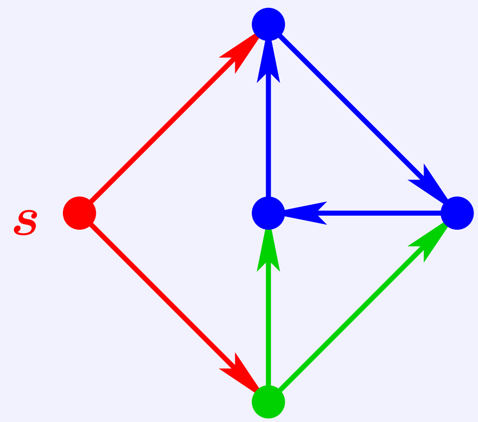


Definíció. *Legyen* $G = (V, E)$ *egy irányított gráf. Bevezetünk egy relációt* V*-n:* $u, v \in V$*-re legyen* $u \approx v$, *ha* G*-ben léteznek* $u \rightsquigarrow v$ *és* $v \rightsquigarrow u$ *irányított utak.*

Ez ekvivalenciareláció $\Longrightarrow$
Definíció. *A* $\approx$ *reláció ekvivalenciaosztályait a* G erősen összefüggő (erős) komponenseinek *nevezzük.*

Erősen összefüggő (erős) komponensek

Definíció. *Egy $G = (V, E)$ irányított gráf* erősen összefüggő*, ha bármely $u, v \in V$ pontpárra létezik $u \rightsquigarrow v$ irányított út.*

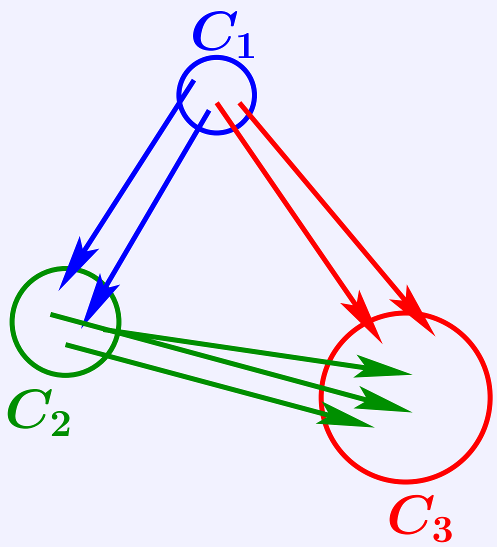


Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf. Bevezetünk egy relációt V-n: $u, v \in V$-re legyen* $u \approx v$, *ha G-ben léteznek $u \rightsquigarrow v$ és $v \rightsquigarrow u$ irányított utak.*

Ez ekvivalenciareláció $\Longrightarrow$

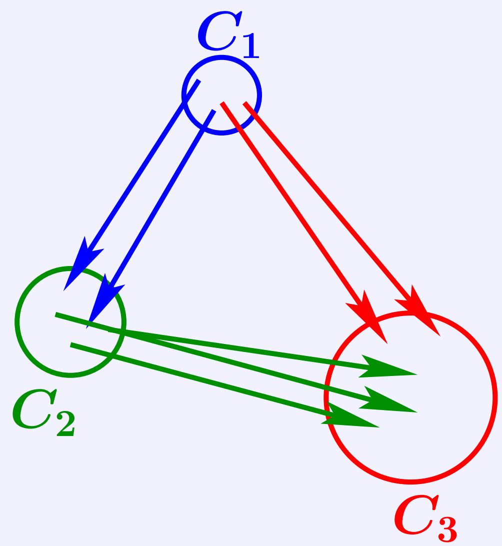
Definíció. *A $\approx$ reláció ekvivalenciaosztályait a G* erősen összefüggő (erős) komponenseinek *nevezzük.*

Tétel. *Egy irányított gráf két erős komponense között az élek csak egy irányba mehetnek.*



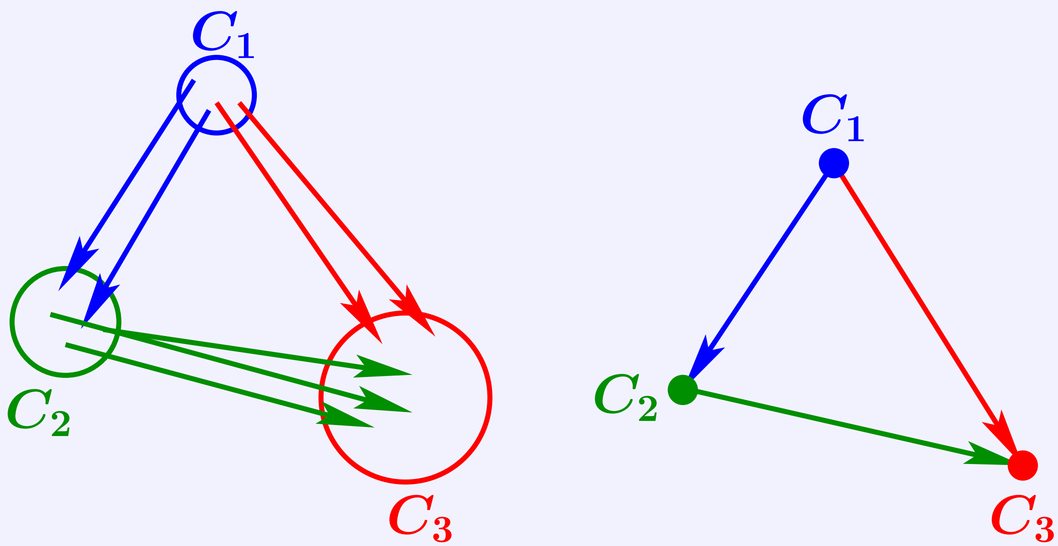
Tétel. *Egy irányított gráf két erős komponense között az élek csak egy irányba mehetnek.*

Bizonyítás: Ha menne él a $C_1 \longrightarrow C_2$ és $C_2 \longrightarrow C_1$-be is, akkor C_1 és C_2 ugyanabban az erős komponensben volna.



Tétel. *Egy irányított gráf két erős komponense között az élek csak egy irányba mehetnek.*

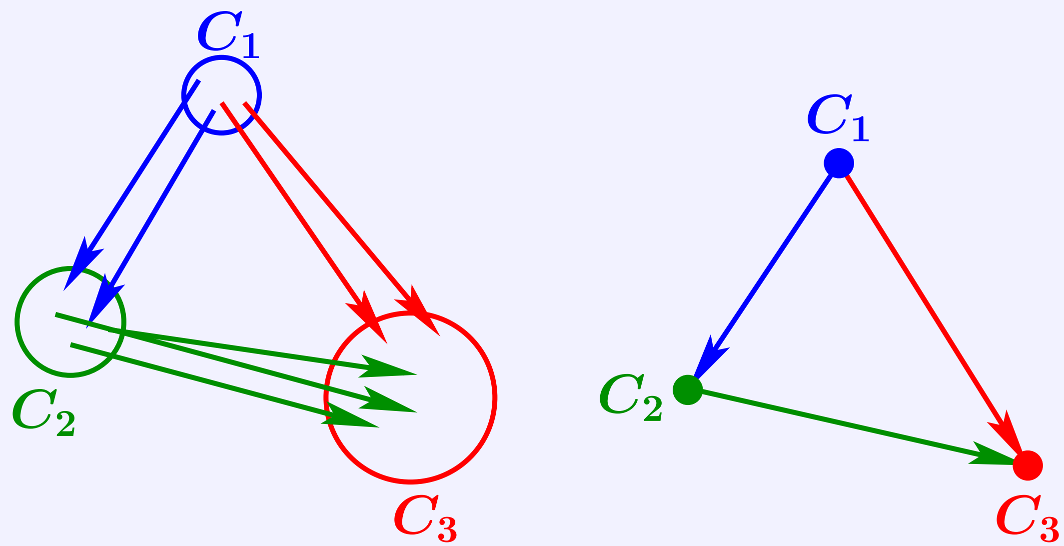
Bizonyítás: Ha menne él a $C_1 \longrightarrow C_2$ és $C_2 \longrightarrow C_1$-be is, akkor C_1 és C_2 ugyanabban az erős komponensben volna.



Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf. G* redukált gráfja *egy irányított gráf, melynek pontjai a G erős komponensei; a C_1, C_2 komponensek között akkor van $C_1 \longrightarrow C_2$ él, ha G-ben a C_1 komponens valamely pontjából vezet él a C_2 komponensbe.*

Tétel. *Egy irányított gráf két erős komponense között az élek csak egy irányba mehetnek.*

Bizonyítás: Ha menne él a $C_1 \longrightarrow C_2$ és $C_2 \longrightarrow C_1$-be is, akkor C_1 és C_2 ugyanabban az erős komponensben volna.

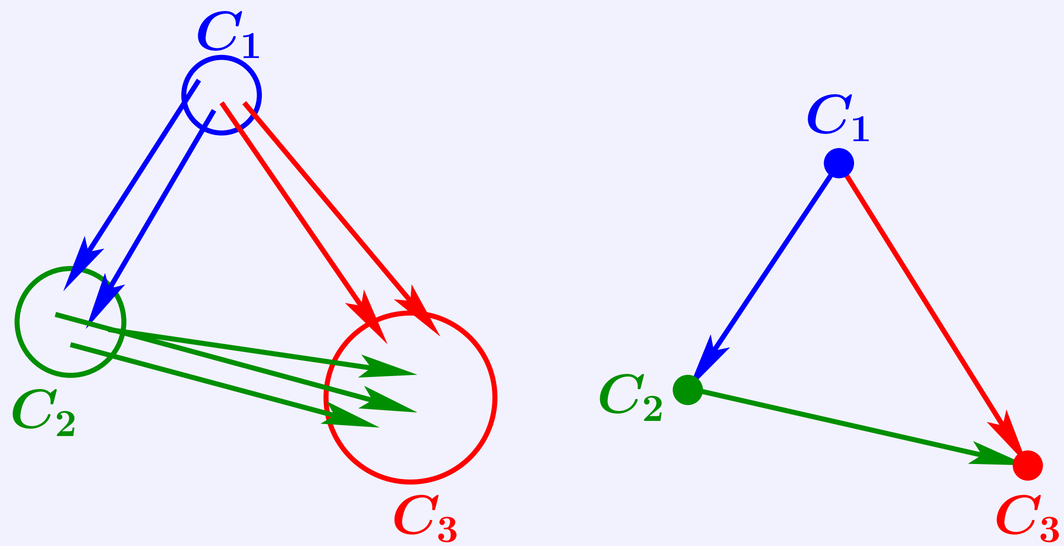


Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf. G redukált gráfja egy irányított gráf, melynek pontjai a G erős komponensei; a C_1, C_2 komponensek között akkor van $C_1 \longrightarrow C_2$ él, ha G-ben a C_1 komponens valamely pontjából vezet él a C_2 komponensbe.*

A redukált gráf mindig DAG lesz.

Tétel. *Egy irányított gráf két erős komponense között az élek csak egy irányba mehetnek.*

Bizonyítás: Ha menne él a $C_1 \longrightarrow C_2$ és $C_2 \longrightarrow C_1$-be is, akkor C_1 és C_2 ugyanabban az erős komponensben volna.



Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf. G redukált gráfja egy irányított gráf, melynek pontjai a G erős komponensei; a C_1, C_2 komponensek között akkor van $C_1 \longrightarrow C_2$ él, ha G-ben a C_1 komponens valamely pontjából vezet él a C_2 komponensbe.*

A redukált gráf mindig DAG lesz. $\Longleftarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_k \longrightarrow C_1$ irányított kör a redukált gráfban azt jelentené, hogy $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$ a G ugyanazon erős komponensében van.

Erősen összefüggő komponensek meghatározása

(1) Mélységi bejárással végigmegyünk G-n, közben minden pontnak sorszámot adunk: a befejezési számát

Erősen összefüggő komponensek meghatározása

(1) Mélységi bejárással végigmegyünk G-n, közben minden pontnak sorszámot adunk: a befejezési számát

(2) Elkészítjük a G_{ford} gráfot, melyet úgy kapunk G-ből, hogy minden él irányítását megfordítjuk. Pontosabban: $G_{\text{ford}} := (V, E')$, ahol $u \to v \in E'$ akkor és csak akkor, ha $v \to u \in E$.

Erősen összefüggő komponensek meghatározása

(1) Mélységi bejárással végigmegyünk G-n, közben minden pontnak sorszámot adunk: a befejezési számát

(2) Elkészítjük a G_{ford} gráfot, melyet úgy kapunk G-ből, hogy minden él irányítását megfordítjuk. Pontosabban: $G_{\text{ford}} := (V, E')$, ahol $u \longrightarrow v \in E'$ akkor és csak akkor, ha $v \longrightarrow u \in E$.

(3) Bejárjuk a G_{ford} gráfot mélységi bejárással, a legnagyobb sorszámú csúccsal kezdve (az (1)-beli befejezési számozás szerint). Új gyökérpont választásakor mindig a legnagyobb sorszámú csúcsot vesszük a maradékból.

Tétel. *A (3) pontban kapott fák lesznek* G *erős komponensei, azaz* G*-ben* $x \approx y$ *pontosan akkor igaz, ha* x *és* y *egy fában vannak.*

Tétel. *A (3) pontban kapott fák lesznek G erős komponensei, azaz G-ben $x \approx y$ pontosan akkor igaz, ha x és y egy fában vannak.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$: Azt kell belátni, hogy egy erős komponens pontjai egy fába kerülnek

Tétel. *A (3) pontban kapott fák lesznek G erős komponensei, azaz G-ben $x \approx y$ pontosan akkor igaz, ha x és y egy fában vannak.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$: Azt kell belátni, hogy egy erős komponens pontjai egy fába kerülnek
Legyen K egy erős komponens, és legyen x a K legkisebb mélységi számú pontja.

Tétel. *A (3) pontban kapott fák lesznek* G *erős komponensei, azaz* G*-ben* $x \approx y$ *pontosan akkor igaz, ha* x *és* y *egy fában vannak.*

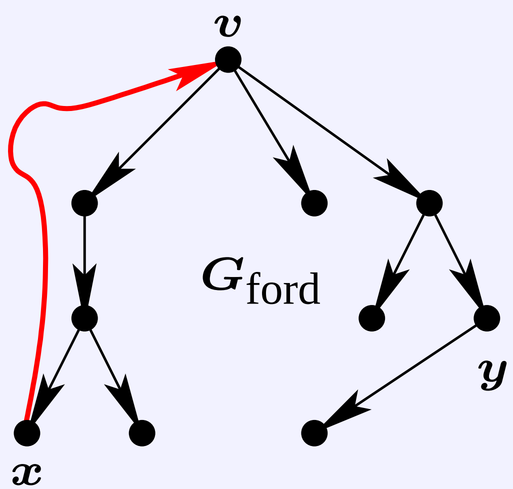
Bizonyítás: $\Rightarrow$: Azt kell belátni, hogy egy erős komponens pontjai egy fába kerülnek
Legyen K egy erős komponens, és legyen x a K legkisebb mélységi számú pontja.
$\implies K \subseteq S_x \impliedby$ részfa-lemma ✓

Tétel. *A (3) pontban kapott fák lesznek G erős komponensei, azaz G-ben $x \approx y$ pontosan akkor igaz, ha x és y egy fában vannak.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$: Azt kell belátni, hogy egy erős komponens pontjai egy fába kerülnek

Legyen K egy erős komponens, és legyen x a K legkisebb mélységi számú pontja.

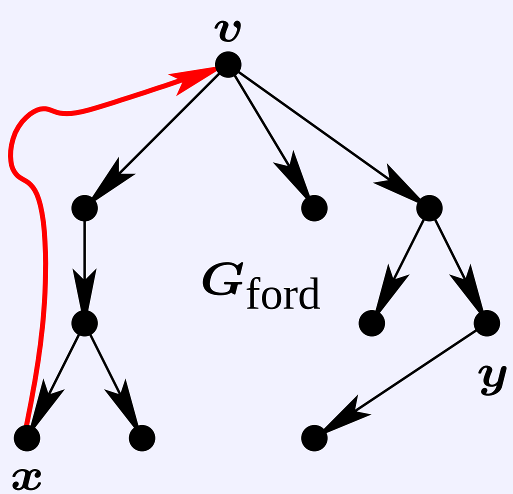
$\Longrightarrow K \subseteq S_x \Longleftarrow$ részfa-lemma $\surd$



$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy x és y egy fában vannak a (3) pont szerinti mélységi bejárás után. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $x \approx y$ a G gráfban, azaz x és y egymásból irányított úton elérhetők.

Tétel. *A (3) pontban kapott fák lesznek G erős komponensei, azaz G-ben $x \approx y$ pontosan akkor igaz, ha x és y egy fában vannak.*

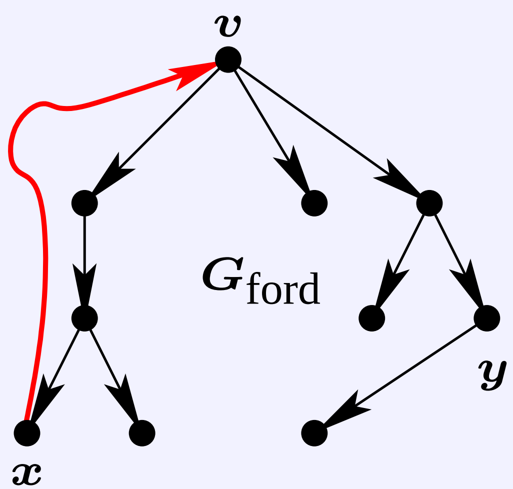
Bizonyítás: $\Rightarrow$: Azt kell belátni, hogy egy erős komponens pontjai egy fába kerülnek
Legyen K egy erős komponens, és legyen x a K legkisebb mélységi számú pontja.
$\Longrightarrow K \subseteq S_x \Longleftarrow$ részfa-lemma $\surd$



$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy x és y egy fában vannak a (3) pont szerinti mélységi bejárás után. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $x \approx y$ a G gráfban, azaz x és y egymásból irányított úton elérhetők.
Legyen a v csúcs a gyökere annak a fának, mely x-et és y-t is tartalmazza.

Tétel. *A (3) pontban kapott fák lesznek G erős komponensei, azaz G-ben $x \approx y$ pontosan akkor igaz, ha x és y egy fában vannak.*

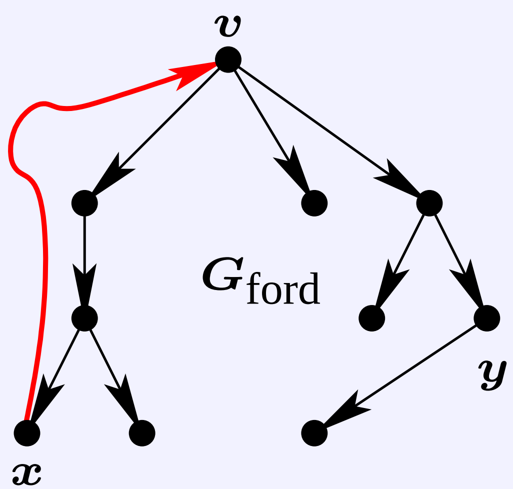
Bizonyítás: $\Rightarrow$: Azt kell belátni, hogy egy erős komponens pontjai egy fába kerülnek
Legyen K egy erős komponens, és legyen x a K legkisebb mélységi számú pontja.
$\Longrightarrow K \subseteq S_x \Longleftarrow$ részfa-lemma $\checkmark$



$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy x és y egy fában vannak a (3) pont szerinti mélységi bejárás után. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $x \approx y$ a G gráfban, azaz x és y egymásból irányított úton elérhetők.
Legyen a v csúcs a gyökere annak a fának, mely x-et és y-t is tartalmazza.
$\Longrightarrow G_{\text{ford}}$ gráfban van $v \rightsquigarrow x$ irányított út, $\Longrightarrow G$ gráfban van egy L irányított út $x \rightsquigarrow v$-be.

Tétel. *A (3) pontban kapott fák lesznek G erős komponensei, azaz G-ben $x \approx y$ pontosan akkor igaz, ha x és y egy fában vannak.*

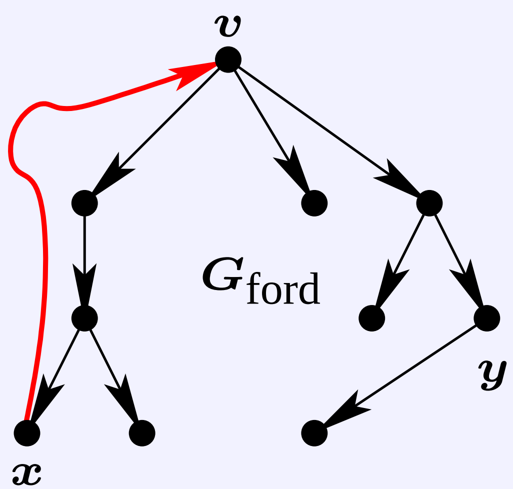
Bizonyítás: $\Rightarrow$: Azt kell belátni, hogy egy erős komponens pontjai egy fába kerülnek
Legyen K egy erős komponens, és legyen x a K legkisebb mélységi számú pontja.
$\Longrightarrow K \subseteq S_x \Longleftarrow$ részfa-lemma $\surd$



$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy x és y egy fában vannak a (3) pont szerinti mélységi bejárás után. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $x \approx y$ a G gráfban, azaz x és y egymásból irányított úton elérhetők.
Legyen a v csúcs a gyökere annak a fának, mely x-et és y-t is tartalmazza.
$\Longrightarrow G_{\text{ford}}$ gráfban van $v \rightsquigarrow x$ irányított út, $\Longrightarrow G$ gráfban van egy L irányított út $x \rightsquigarrow v$-be.
Legyen x' az L-nek az a pontja, amelynek az első bejárás szerinti mélységi száma a legkisebb.

Tétel. *A (3) pontban kapott fák lesznek G erős komponensei, azaz G-ben $x \approx y$ pontosan akkor igaz, ha x és y egy fában vannak.*

Bizonyítás: $\Rightarrow$: Azt kell belátni, hogy egy erős komponens pontjai egy fába kerülnek
Legyen K egy erős komponens, és legyen x a K legkisebb mélységi számú pontja.
$\Longrightarrow K \subseteq S_x \Longleftarrow$ részfa-lemma $\checkmark$



$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy x és y egy fában vannak a (3) pont szerinti mélységi bejárás után. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $x \approx y$ a G gráfban, azaz x és y egymásból irányított úton elérhetők.
Legyen a v csúcs a gyökere annak a fának, mely x-et és y-t is tartalmazza.
$\Longrightarrow G_{\text{ford}}$ gráfban van $v \rightsquigarrow x$ irányított út, $\Longrightarrow G$ gráfban van egy L irányított út $x \rightsquigarrow v$-be.
Legyen x' az L-nek az a pontja, amelynek az első bejárás szerinti mélységi száma a legkisebb.
részfa-lemma $\Longrightarrow L$-nek az $x' \rightsquigarrow v$ darabjában levő csúcsok az (1) bejárásnál x' leszármazottjai lesznek.

Az x' gyökerű részfában x' befejezési száma a legnagyobb $\Longrightarrow$ v nem választhattuk v-t gyökérnek $\Longrightarrow$ $x' = v$.

Az x' gyökerű részfában x' befejezési száma a legnagyobb $\Longrightarrow v$ nem választhattuk v-t gyökérnek $\Longrightarrow x' = v$.
Az L pontjai közül tehát v-t látogattuk meg legelőször, és v-nek a befejezési száma volt a legnagyobb.

Az x' gyökerű részfában x' befejezési száma a legnagyobb $\Longrightarrow v$ nem választhattuk v-t gyökérnek $\Longrightarrow x' = v$.
Az L pontjai közül tehát v-t látogattuk meg legelőször, és v-nek a befejezési száma volt a legnagyobb. $\Longrightarrow$ Így G-ben van $v \rightsquigarrow x$

Az x' gyökerű részfában x' befejezési száma a legnagyobb $\Longrightarrow v$ nem választhattuk v-t gyökérnek $\Longrightarrow x' = v$.
Az L pontjai közül tehát v-t látogattuk meg legelőször, és v-nek a befejezési száma volt a legnagyobb. $\Longrightarrow$ Így G-ben van $v \rightsquigarrow x$

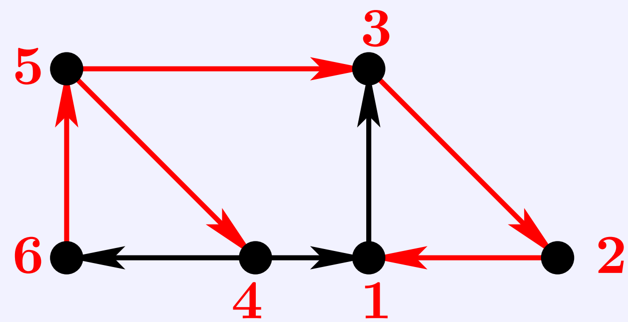
$\Longrightarrow x \approx v$, hasonlóan $y \approx v \Longrightarrow x \approx y$ $\checkmark$

Az x' gyökerű részfában x' befejezési száma a legnagyobb $\Longrightarrow v$ nem választhattuk v-t gyökérnek $\Longrightarrow x' = v$.
Az L pontjai közül tehát v-t látogattuk meg legelőször, és v-nek a befejezési száma volt a legnagyobb. $\Longrightarrow$ Így G-ben van $v \rightsquigarrow x$

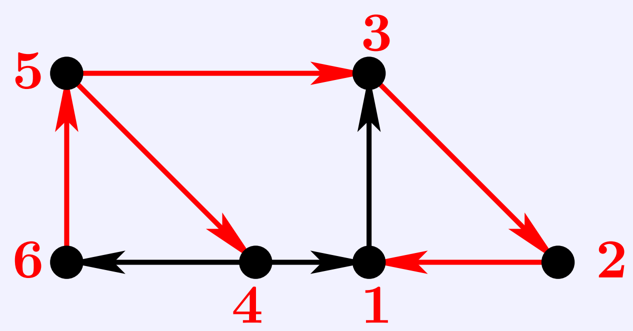
$\Longrightarrow x \approx v$, hasonlóan $y \approx v \Longrightarrow x \approx y$ $\surd$

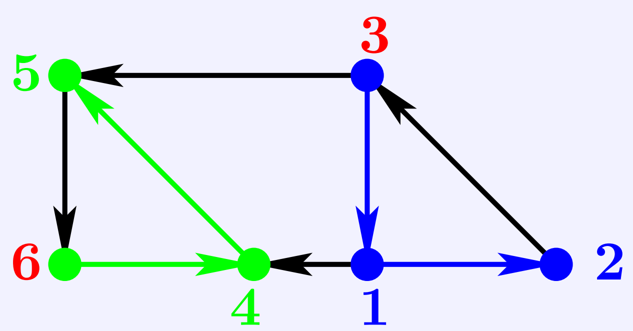
Lépésszám: $O(n+e) + O(e) + O(n+e) = O(n+e)$

Példa



Példa





Irányítatlan gráfok mélységi bejárása

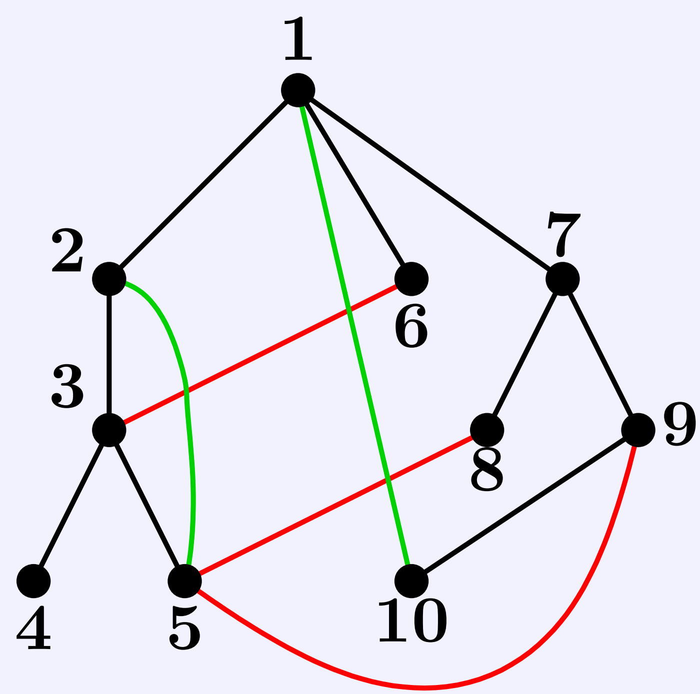
Mélységi keresés ugyanígy.

Irányítatlan gráfok mélységi bejárása

Mélységi keresés ugyanígy.
Mélységi feszítő erdő komponensei $\Longrightarrow$ összefüggő komponensek

Irányítatlan gráfok mélységi bejárása

Mélységi keresés ugyanígy.
Mélységi feszítő erdő komponensei $\Longrightarrow$ összefüggő komponensek



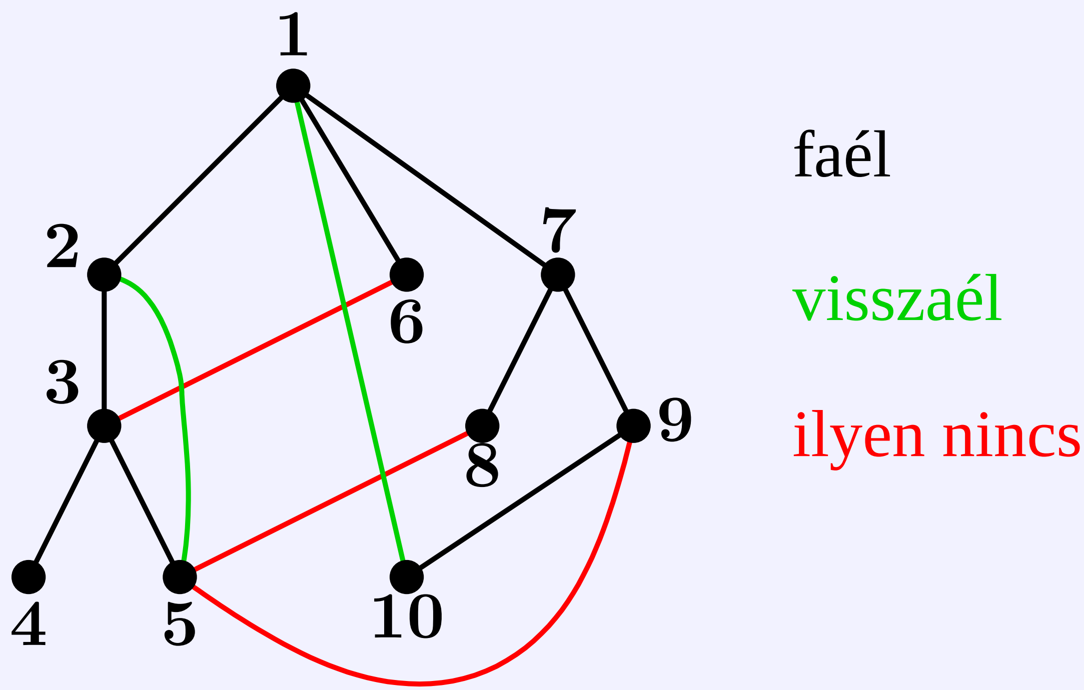
faél

visszaél

ilyen nincs

Irányítatlan gráfok mélységi bejárása

Mélységi keresés ugyanígy.
Mélységi feszítő erdő komponensei $\Longrightarrow$ összefüggő komponensek

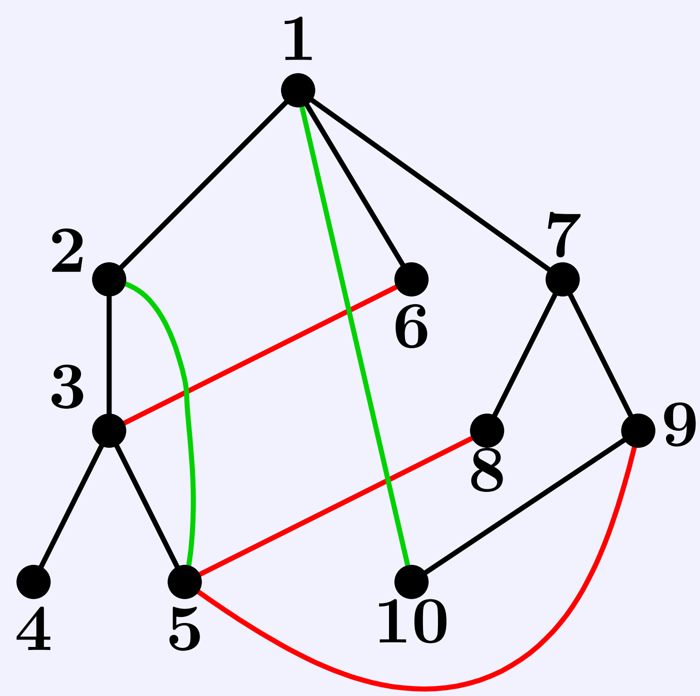


faél $\Longleftrightarrow$ faél

Irányítatlan gráfok mélységi bejárása

Mélységi keresés ugyanígy.

Mélységi feszítő erdő komponensei $\Longrightarrow$ összefüggő komponensek



faél

visszaél

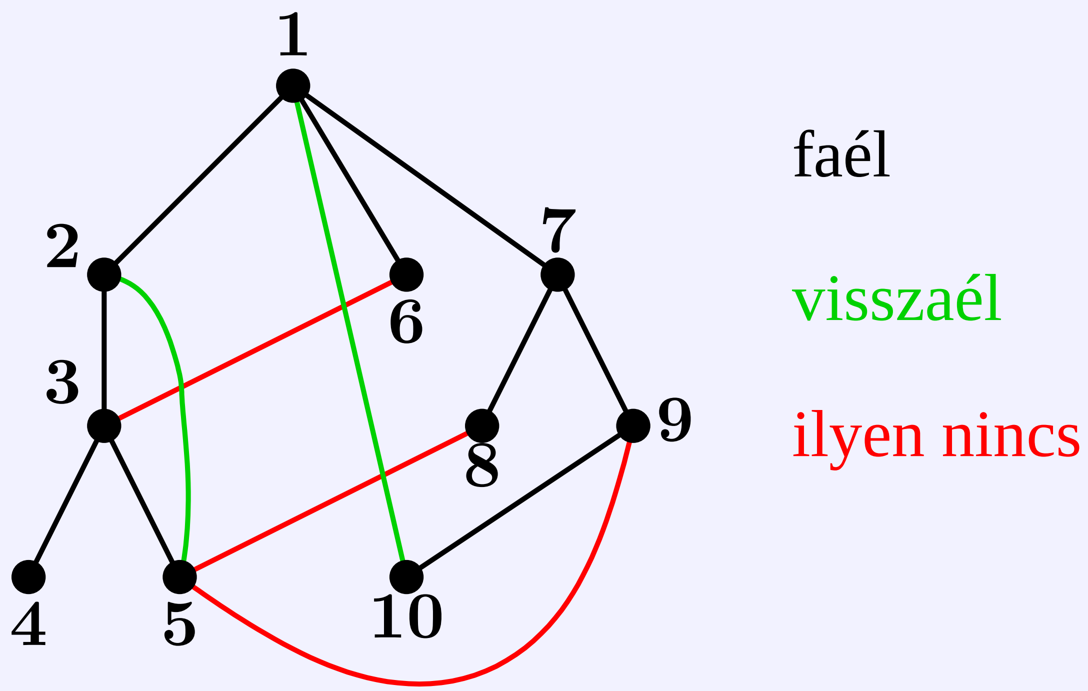
ilyen nincs

faél $\Longleftrightarrow$ faél

előreél, visszaél $\Longleftrightarrow$ visszaél

Irányítatlan gráfok mélységi bejárása

Mélységi keresés ugyanígy.
Mélységi feszítő erdő komponensei $\Longrightarrow$ összefüggő komponensek



faél $\Longleftrightarrow$ faél
előreél, visszaél $\Longleftrightarrow$ visszaél
keresztél $\Longrightarrow$ nem létezik

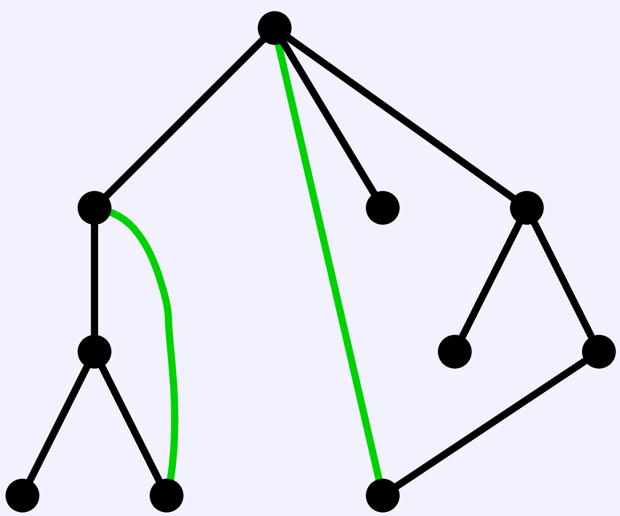
Artikulációs pont keresése

Definíció. *Legyen* $G = (V, E)$ *összefüggő irányítatlan gráf. A* $v \in V$ *csúcs* artikulációs (elvágó) pontja G*-nek, ha* v *és a rá illeszkedő élek elhagyásával a gráf több komponensre esik szét.*

Artikulációs pont keresése

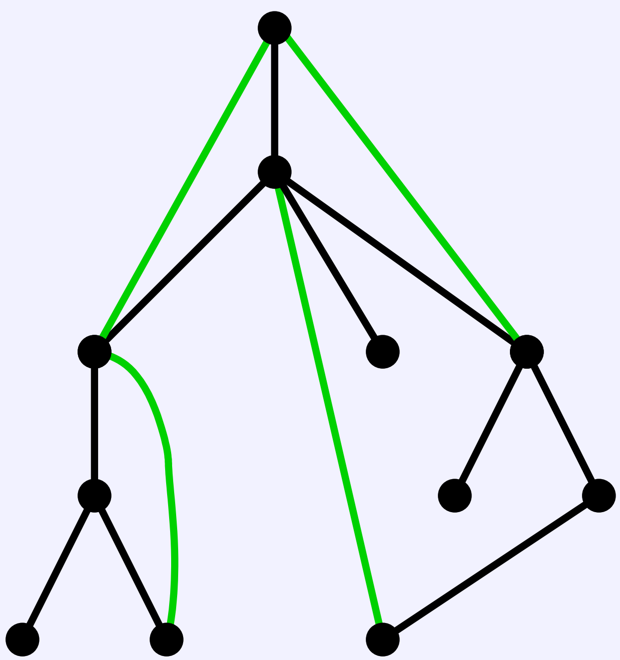
Definíció. *Legyen* $G = (V, E)$ *összefüggő irányítatlan gráf. A* $v \in V$ *csúcs* artikulációs (elvágó) pontja G*-nek, ha* v *és a rá illeszkedő élek elhagyásával a gráf több komponensre esik szét.*

A fa gyökere pontosan akkor artikulációs pontja a gráfnak, ha egynél több fia van



Artikulációs pont keresése

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf. A $v \in V$ csúcs* artikulációs (elvágó) pontja *G-nek, ha v és a rá illeszkedő élek elhagyásával a gráf több komponensre esik szét.*

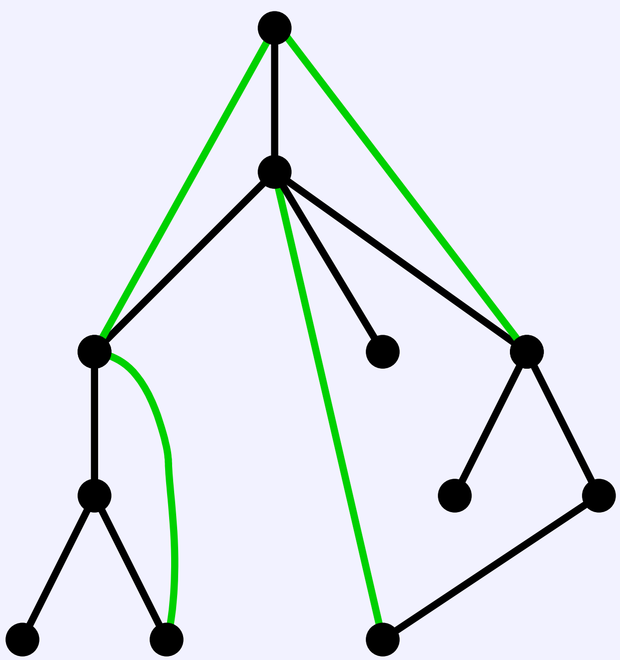


A fa gyökere pontosan akkor artikulációs pontja a gráfnak, ha egynél több fia van

Ha elhagyunk egy v csúcsot $\Longrightarrow$ A visszaélek csak úgy tarthatják egybe a részfákat, ha a v alatti nem üres részfák mindegyikéből megy visszaél a v feletti feszítőfadarabba.

Artikulációs pont keresése

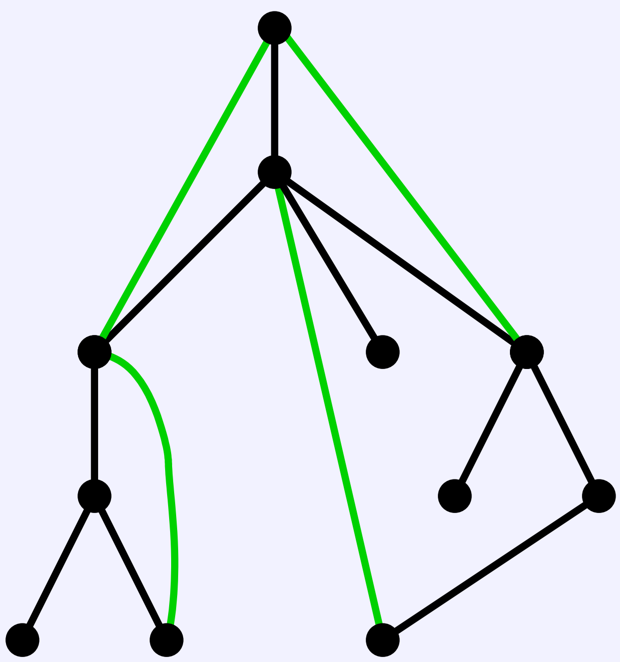
Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf. A $v \in V$ csúcs* artikulációs (elvágó) pontja *G-nek, ha v és a rá illeszkedő élek elhagyásával a gráf több komponensre esik szét.*



A fa gyökere pontosan akkor artikulációs pontja a gráfnak, ha egynél több fia van
Ha elhagyunk egy v csúcsot $\Longrightarrow$ A visszaélek csak úgy tarthatják egybe a részfákat, ha a v alatti nem üres részfák mindegyikéből megy visszaél a v feletti feszítőfadarabba.
Kiszámítjuk a fel$[v]$ értéket. Ez megadja a v csúcshoz annak a „feszítőfában legmagasabban levő" w csúcsnak a mélységi számát, amelyhez el tudunk jutni v-ből úgy, hogy „lefelé" megyünk faélen, aztán egy visszaélen „felmegyünk" w-be.

Artikulációs pont keresése

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf. A $v \in V$ csúcs* artikulációs (elvágó) pontja *G-nek, ha v és a rá illeszkedő élek elhagyásával a gráf több komponensre esik szét.*



A fa gyökere pontosan akkor artikulációs pontja a gráfnak, ha egynél több fia van

Ha elhagyunk egy v csúcsot $\Longrightarrow$ A visszaélek csak úgy tarthatják egybe a részfákat, ha a v alatti nem üres részfák mindegyikéből megy visszaél a v feletti feszítőfadarabba.

Kiszámítjuk a fel$[v]$ értéket. Ez megadja a v csúcshoz annak a „feszítőfában legmagasabban levő" w csúcsnak a mélységi számát, amelyhez el tudunk jutni v-ből úgy, hogy „lefelé" megyünk faélen, aztán egy visszaélen „felmegyünk" w-be.

A v csúcs tehát artikulációs pont $\Longleftrightarrow$ van olyan w fia, melyre fel$[w] \geq$ mszám$[v]$.

Algoritmus

1. Végezzük el a gráf mélységi bejárását, és határozzuk meg a csúcsok mélységi számát

Algoritmus

1. Végezzük el a gráf mélységi bejárását, és határozzuk meg a csúcsok mélységi számát

2. Számítsuk ki minden v csúcsra a fel$[v]$ értéket

Algoritmus

1. Végezzük el a gráf mélységi bejárását, és határozzuk meg a csúcsok mélységi számát

2. Számítsuk ki minden v csúcsra a fel$[v]$ értéket $\Longrightarrow$ Járjuk be a feszítőfát a befejezési számok szerinti sorrendben, és ebben a sorrendben töltsük ki a fel$[\ \ ]$ tömböt.

Algoritmus

1. Végezzük el a gráf mélységi bejárását, és határozzuk meg a csúcsok mélységi számát

2. Számítsuk ki minden v csúcsra a fel$[v]$ értéket $\Longrightarrow$ Járjuk be a feszítőfát a befejezési számok szerinti sorrendben, és ebben a sorrendben töltsük ki a fel$[\ ]$ tömböt.

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$

Algoritmus

1. Végezzük el a gráf mélységi bejárását, és határozzuk meg a csúcsok mélységi számát

2. Számítsuk ki minden v csúcsra a fel$[v]$ értéket $\Longrightarrow$ Járjuk be a feszítőfát a befejezési számok szerinti sorrendben, és ebben a sorrendben töltsük ki a fel[ ] tömböt.

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z], \text{ ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y], \text{ ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$

3. Artikulációs pontok megkeresése: a feszítőfát bejárva a csúcsokról ellenőrizzük, hogy elvágó pontok-e.

Algoritmus

1. Végezzük el a gráf mélységi bejárását, és határozzuk meg a csúcsok mélységi számát

2. Számítsuk ki minden v csúcsra a fel$[v]$ értéket $\Longrightarrow$ Járjuk be a feszítőfát a befejezési számok szerinti sorrendben, és ebben a sorrendben töltsük ki a fel$[\ \ ]$ tömböt.

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$

3. Artikulációs pontok megkeresése: a feszítőfát bejárva a csúcsokról ellenőrizzük, hogy elvágó pontok-e.

(a) a gyökér pontosan akkor artikulációs pont, ha legalább 2 fia van a fában.

Algoritmus

1. Végezzük el a gráf mélységi bejárását, és határozzuk meg a csúcsok mélységi számát

2. Számítsuk ki minden v csúcsra a fel$[v]$ értéket $\Longrightarrow$ Járjuk be a feszítőfát a befejezési számok szerinti sorrendben, és ebben a sorrendben töltsük ki a fel$[\ ]$ tömböt.

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$

3. Artikulációs pontok megkeresése: a feszítőfát bejárva a csúcsokról ellenőrizzük, hogy elvágó pontok-e.

(a) a gyökér pontosan akkor artikulációs pont, ha legalább 2 fia van a fában.
(b) a gyökértől különböző v csúcs akkor és csak akkor artikulációs pont, ha van v-nek olyan y fia, hogy fel$[y] \geq$ mszám$[v]$.

Algoritmus

1. Végezzük el a gráf mélységi bejárását, és határozzuk meg a csúcsok mélységi számát

2. Számítsuk ki minden v csúcsra a fel$[v]$ értéket $\Longrightarrow$ Járjuk be a feszítőfát a befejezési számok szerinti sorrendben, és ebben a sorrendben töltsük ki a fel$[\ \ ]$ tömböt.

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$

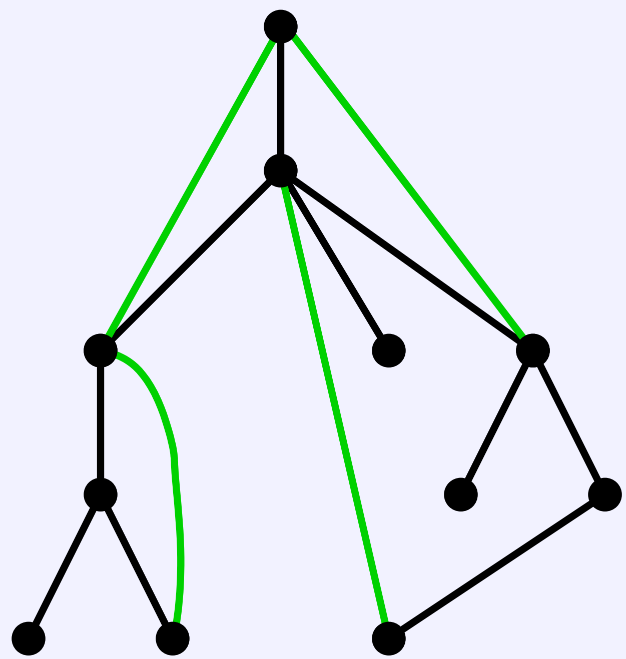
3. Artikulációs pontok megkeresése: a feszítőfát bejárva a csúcsokról ellenőrizzük, hogy elvágó pontok-e.

(a) a gyökér pontosan akkor artikulációs pont, ha legalább 2 fia van a fában.
(b) a gyökértől különböző v csúcs akkor és csak akkor artikulációs pont, ha van v-nek olyan y fia, hogy fel$[y] \geq$ mszám$[v]$.

Lépésszám: $O(n + e)$

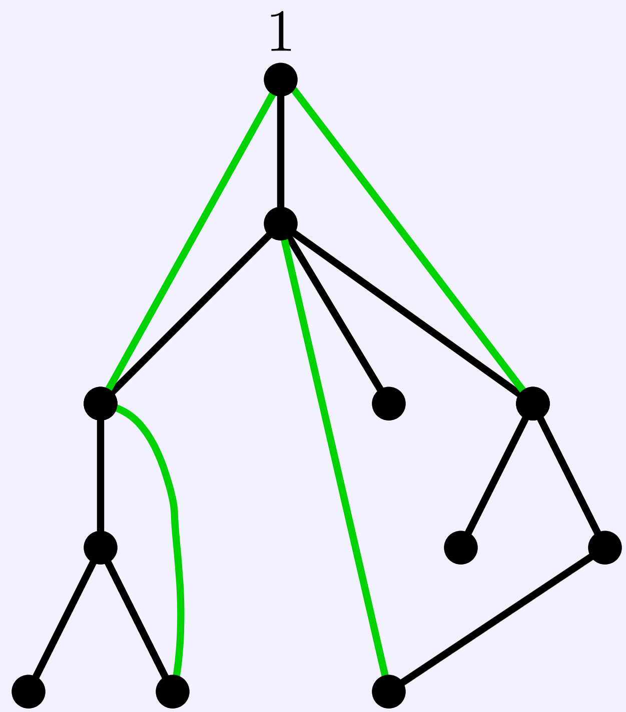
Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



Példa

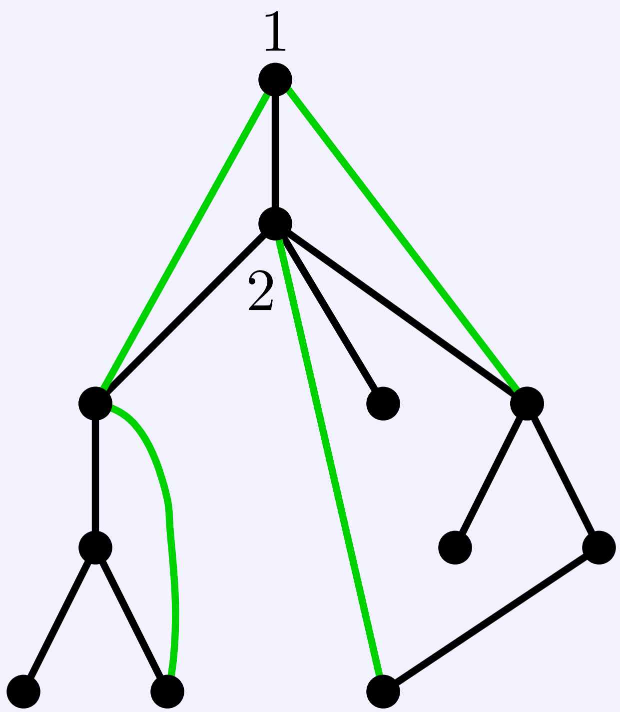
$$\text{fel}[v] = \mathbf{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



mélységi szám

Példa

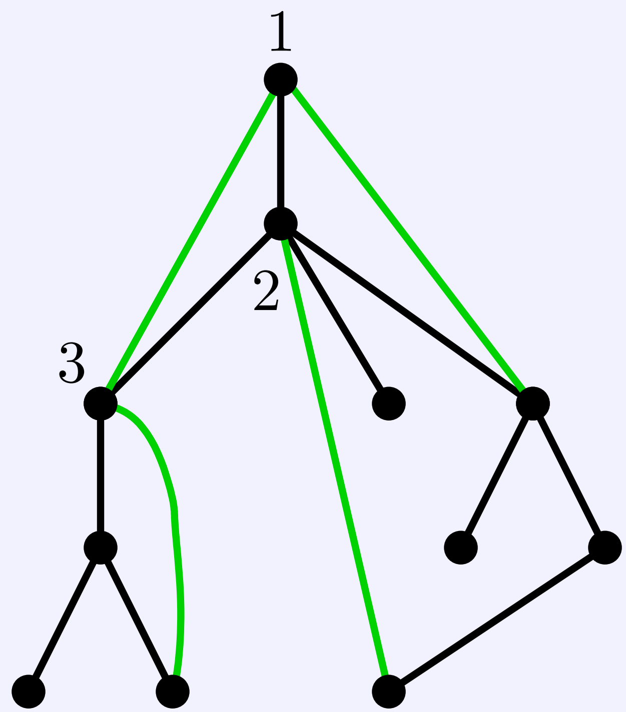
$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array}\right\}$$



mélységi szám

Példa

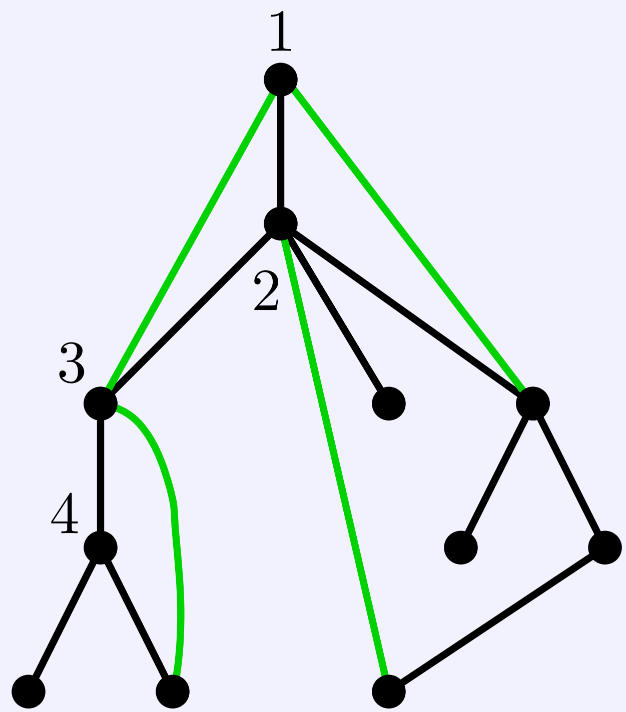
$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array}\right\}$$



mélységi szám

Példa

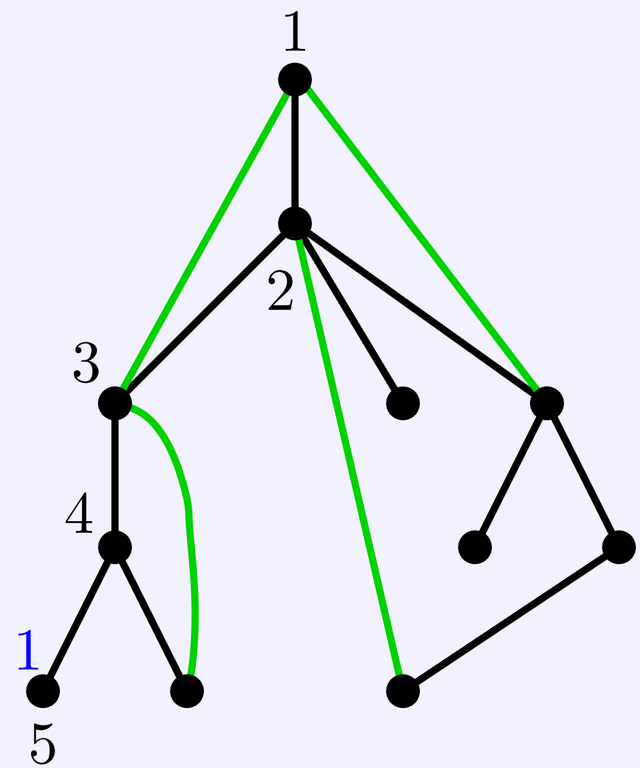
$$\text{fel}[v] = \mathbf{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



mélységi szám

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l}\text{mszám}[v],\\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \rightarrow z \text{ visszaél}\},\\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\}\end{array}\right\}$$

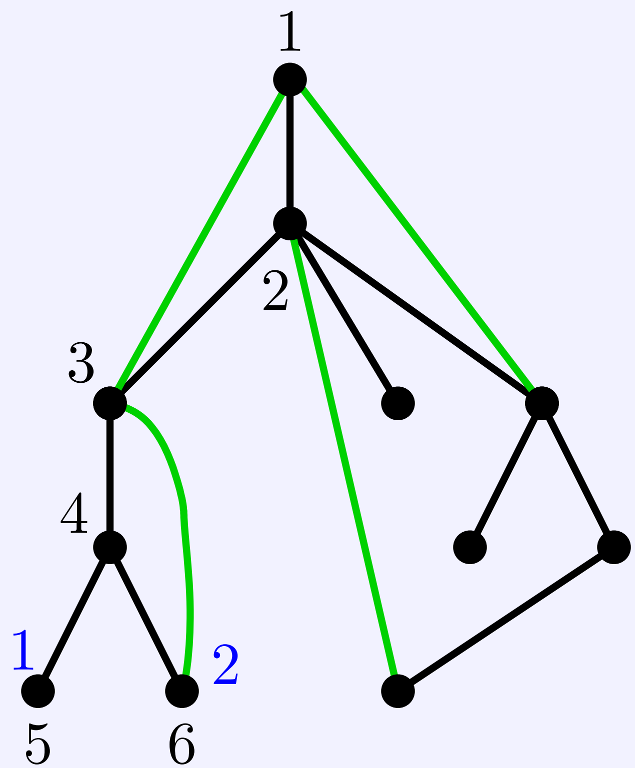


mélységi szám

befejezési szám

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l}\text{mszám}[v],\\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\},\\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\}\end{array}\right\}$$

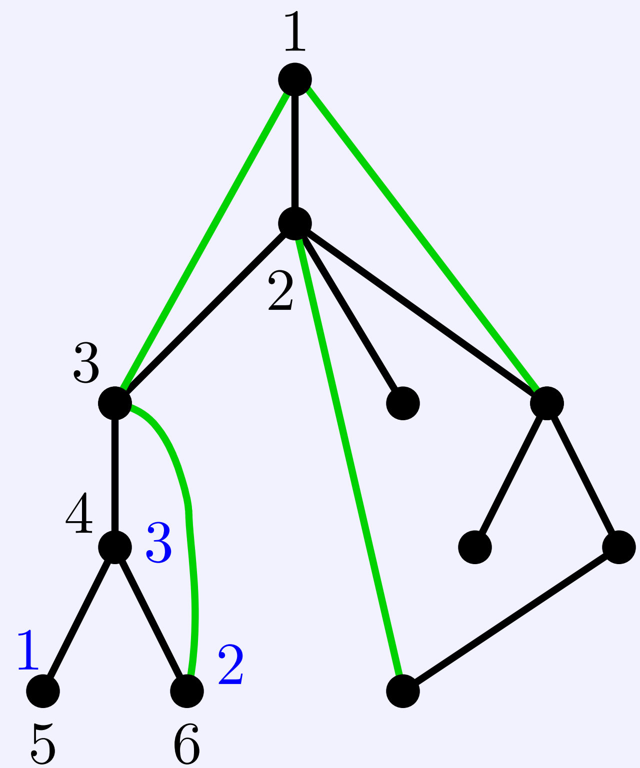


mélységi szám

befejezési szám

Példa

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$

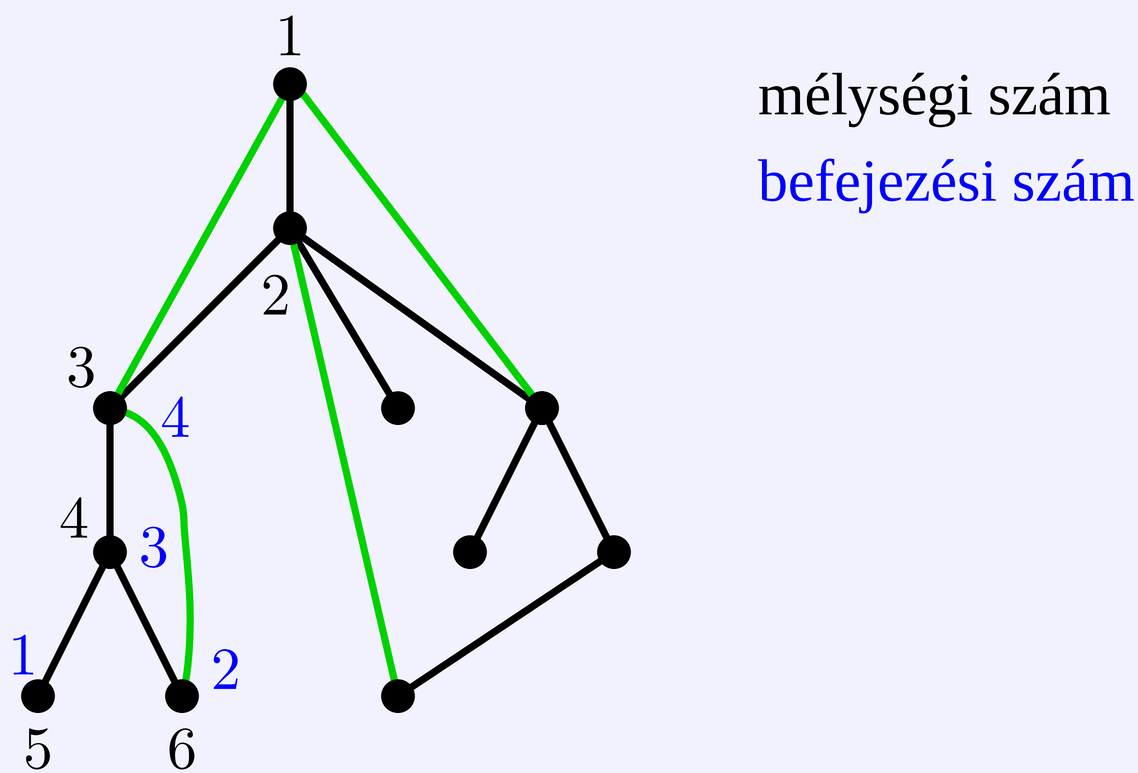


mélységi szám

befejezési szám

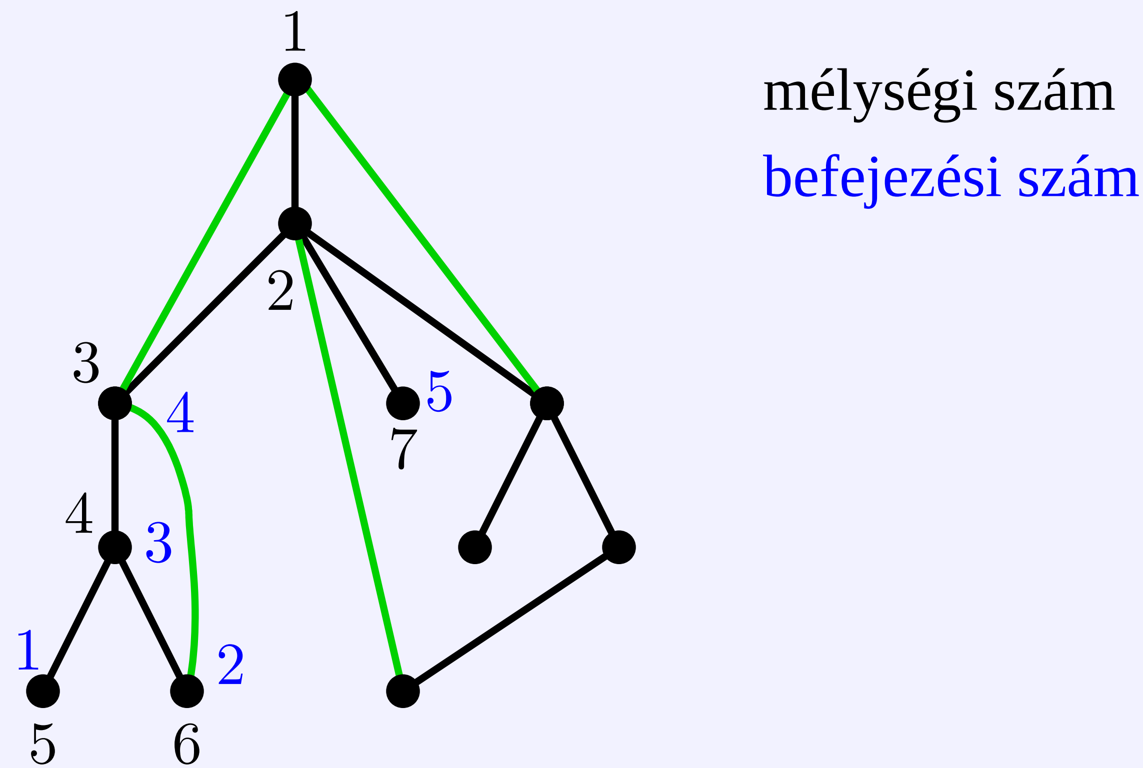
Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l}\text{mszám}[v],\\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\},\\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\}\end{array}\right\}$$



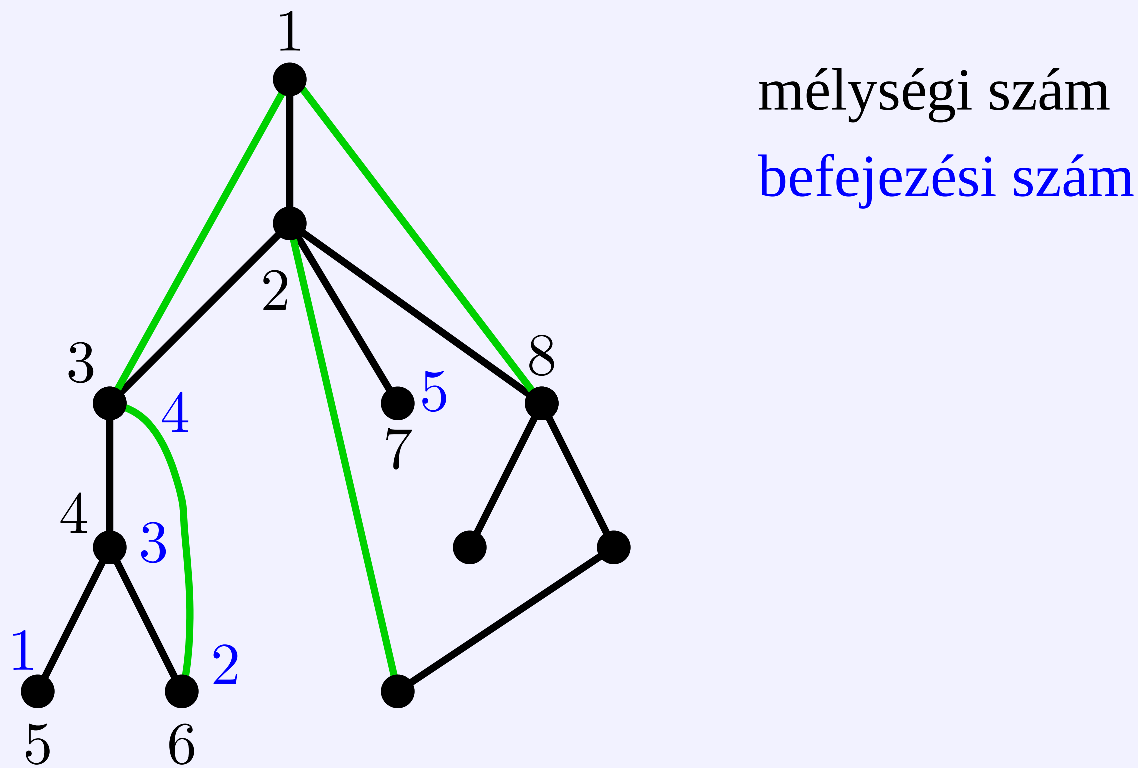
Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l}\text{mszám}[v],\\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\},\\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\}\end{array}\right\}$$



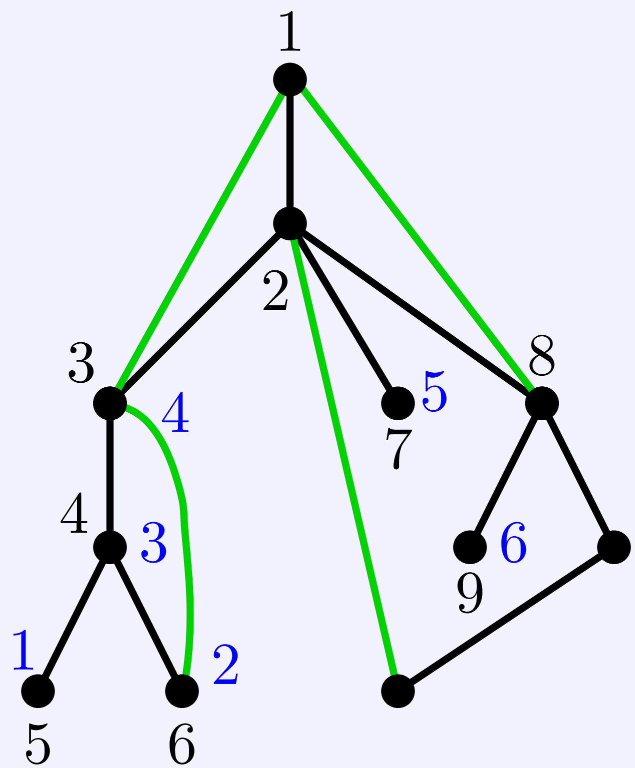
Példda

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



Példa

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$

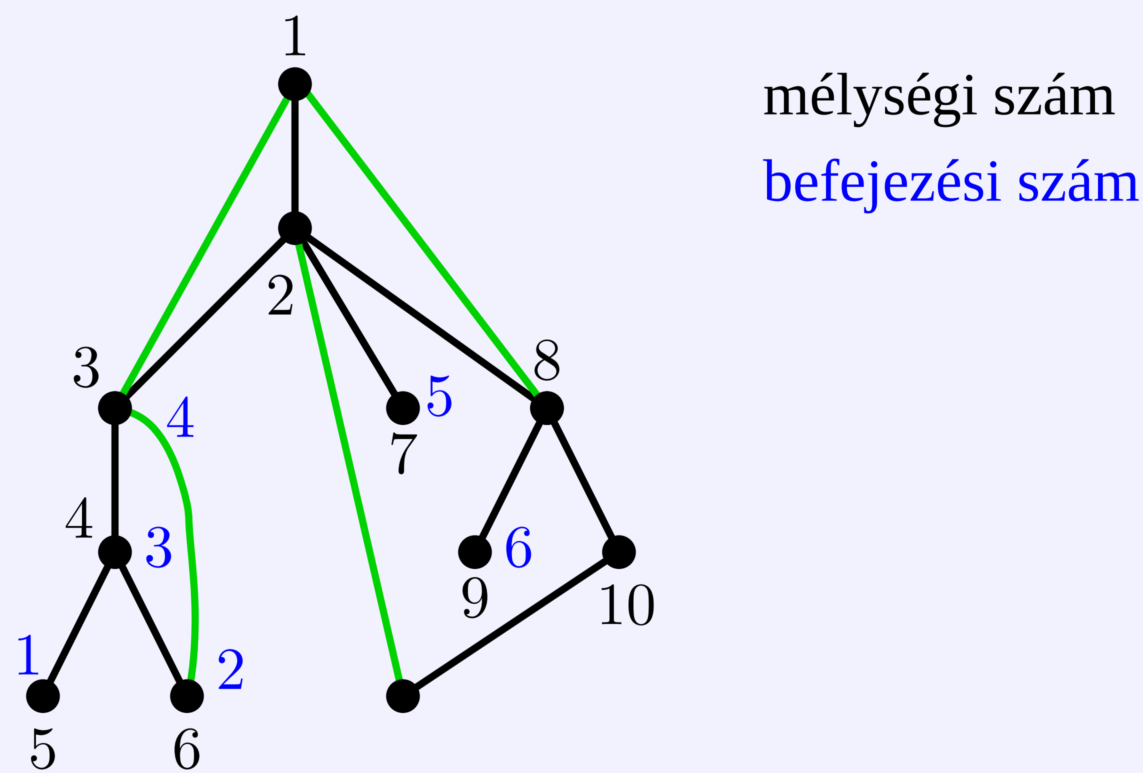


mélységi szám

befejezési szám

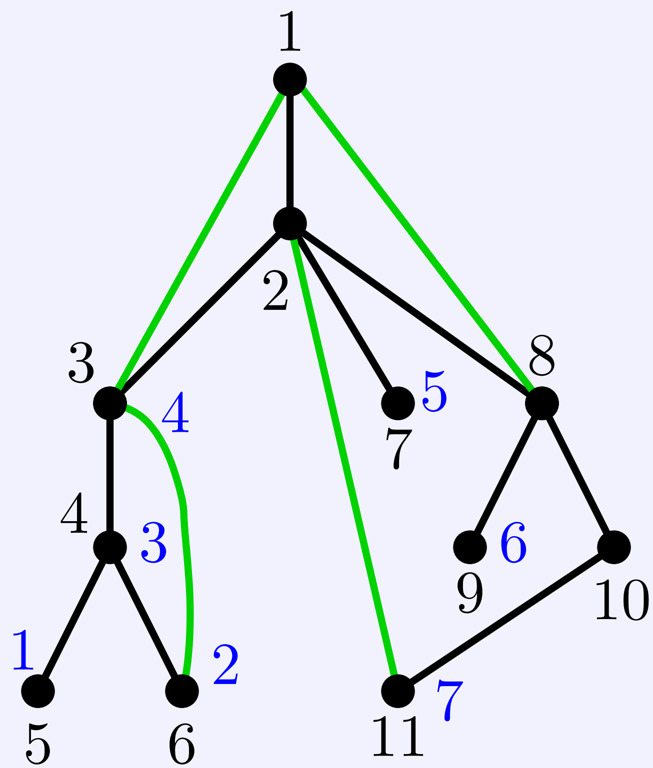
Példa

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \rightarrow z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \longrightarrow z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$

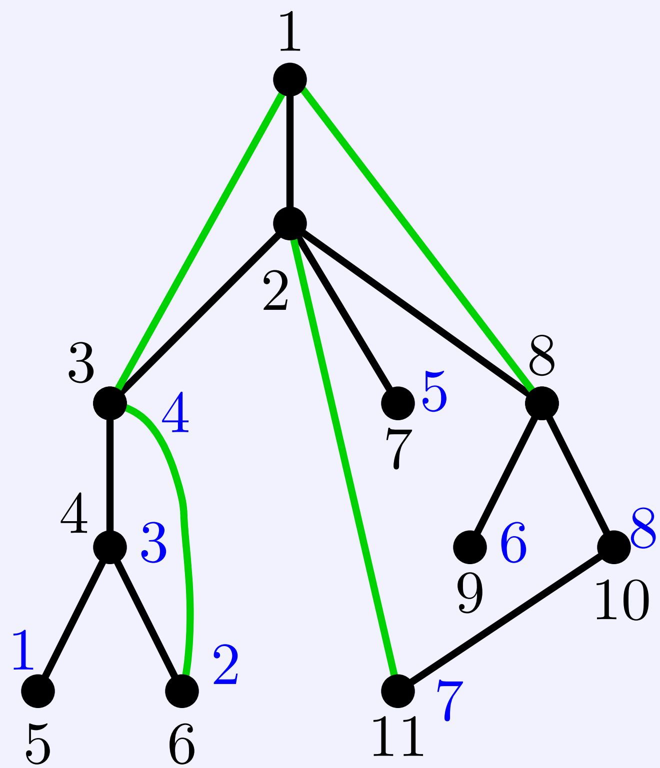


mélységi szám

befejezési szám

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l}\text{mszám}[v],\\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\},\\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\}\end{array}\right\}$$

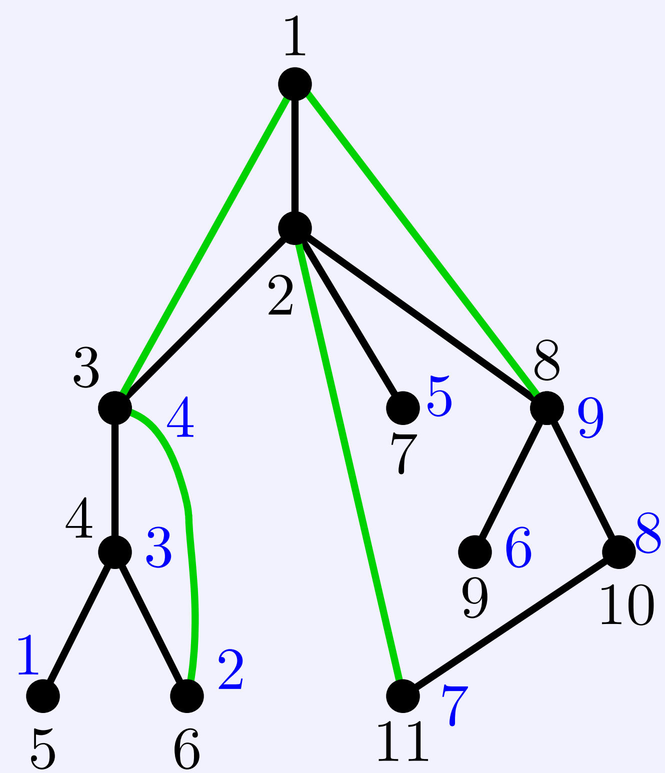


mélységi szám

befejezési szám

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \longrightarrow z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array}\right\}$$

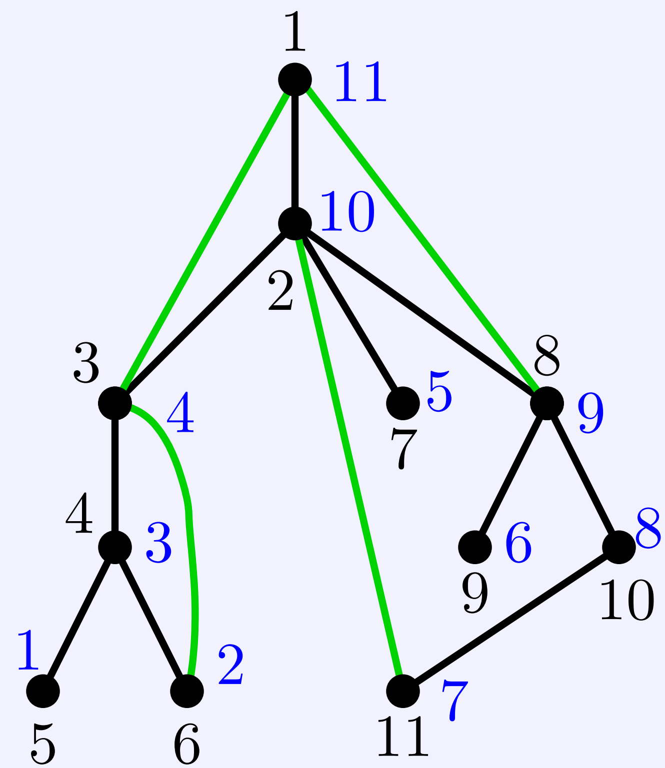


mélységi szám

befejezési szám

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array}\right\}$$

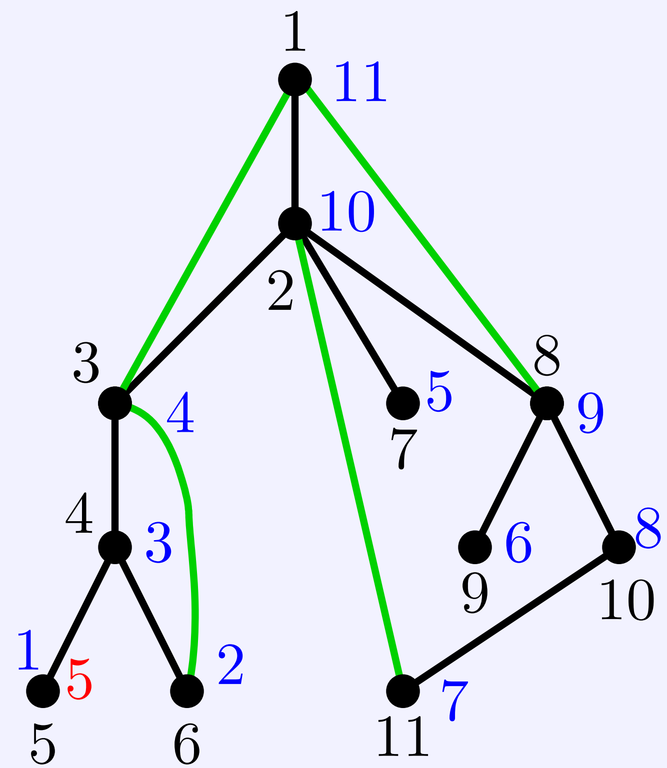


mélységi szám

befejezési szám

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



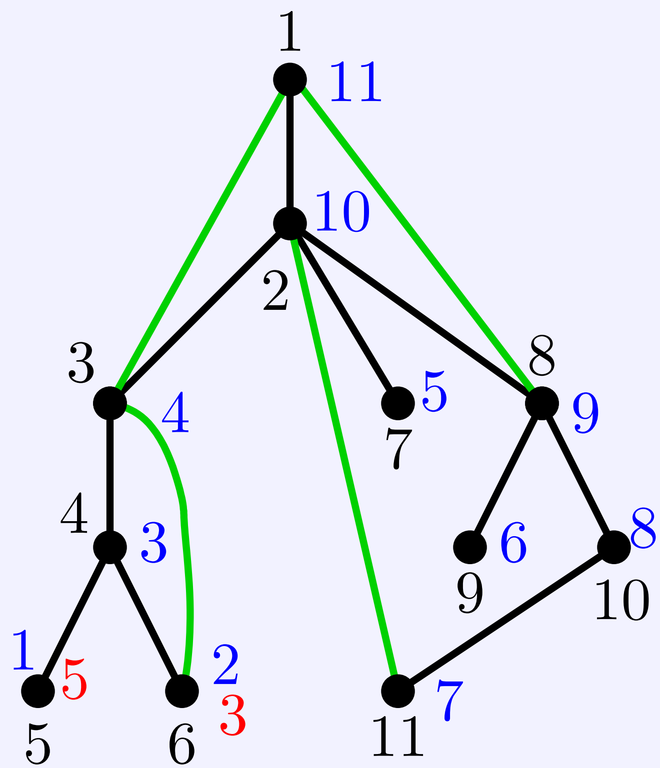
mélységi szám

befejezési szám

fel$[v]$

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



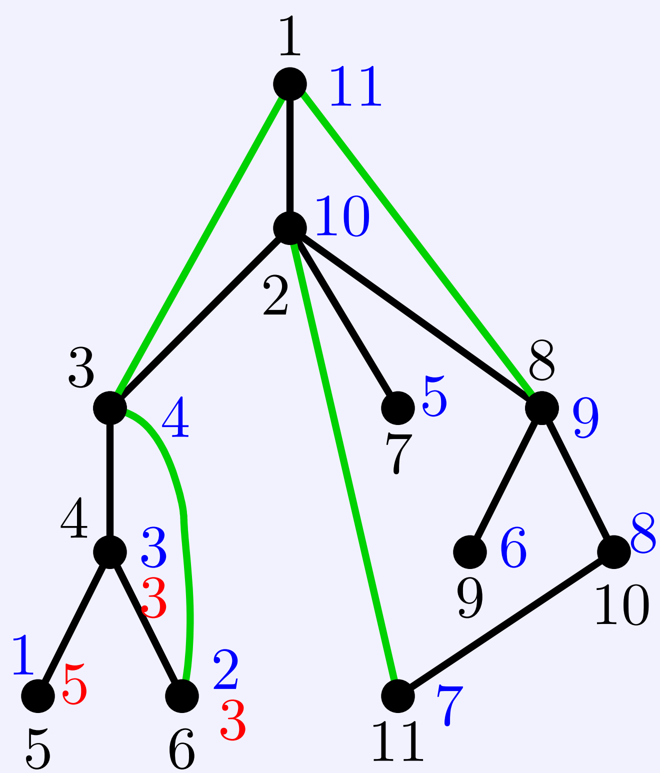
mélységi szám

befejezési szám

fel$[v]$

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \longrightarrow z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



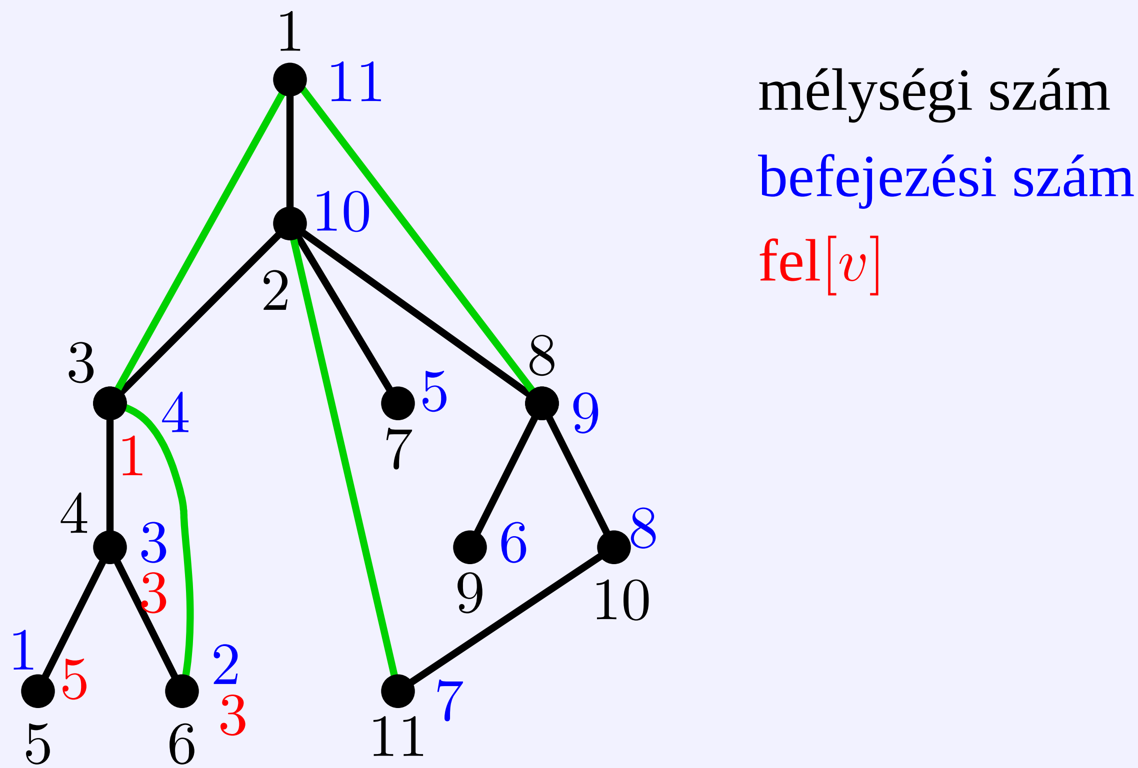
mélységi szám

befejezési szám

fel[v]

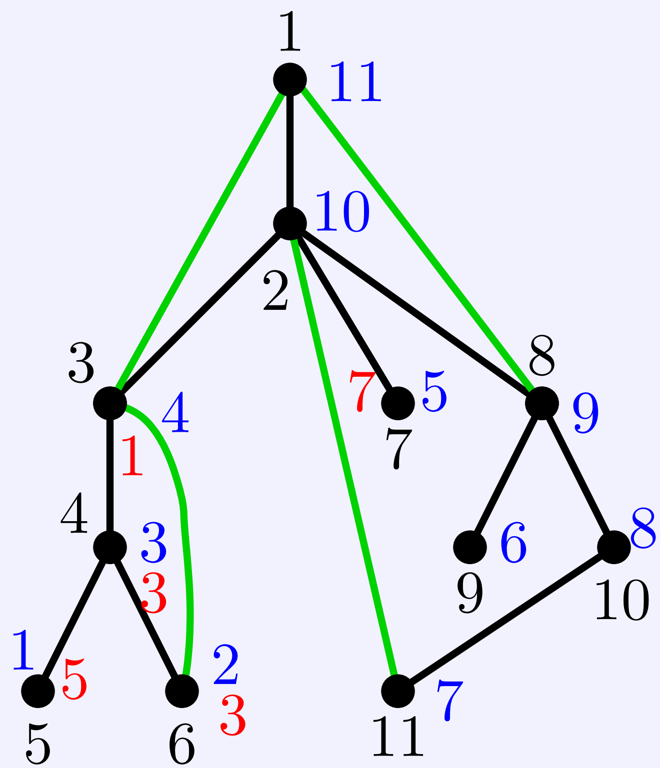
Példa

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



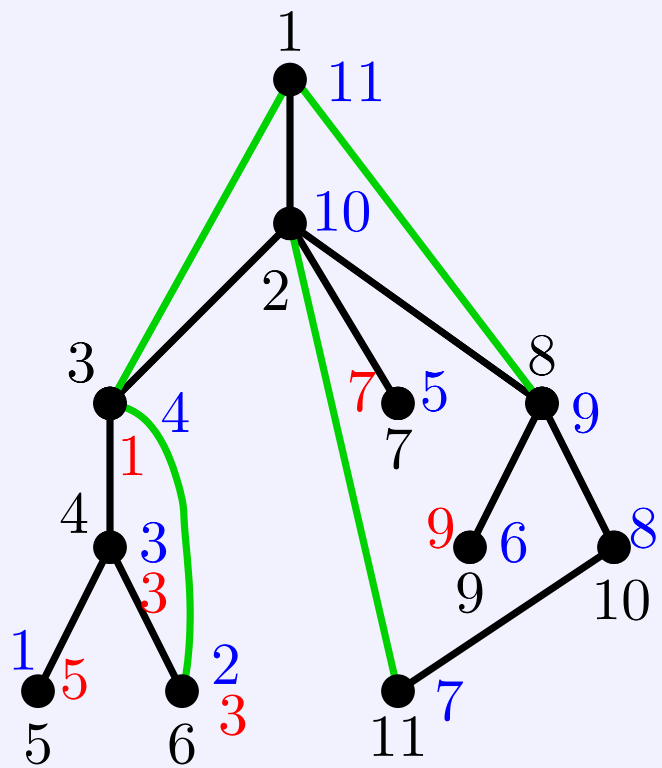
mélységi szám

befejezési szám

fel[v]

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \longrightarrow z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array}\right\}$$



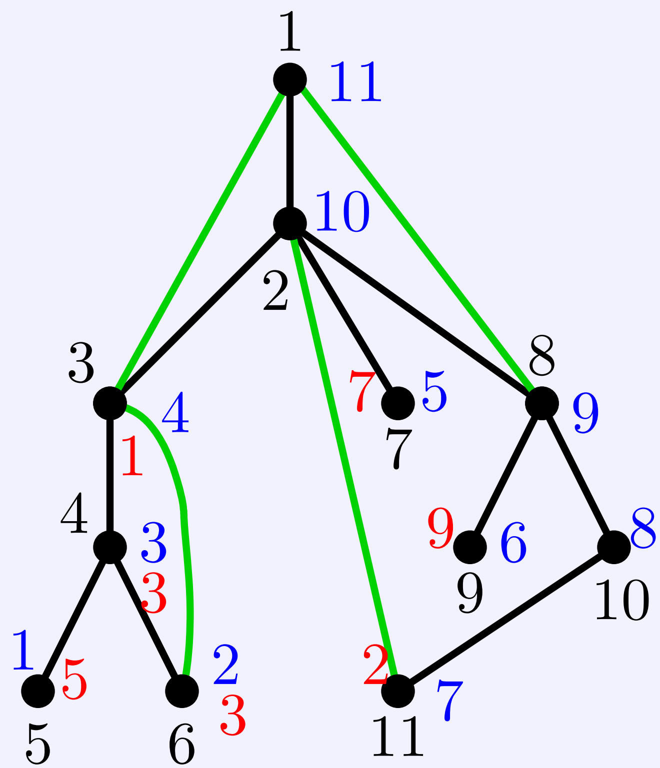
mélységi szám

befejezési szám

fel$[v]$

Példa

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



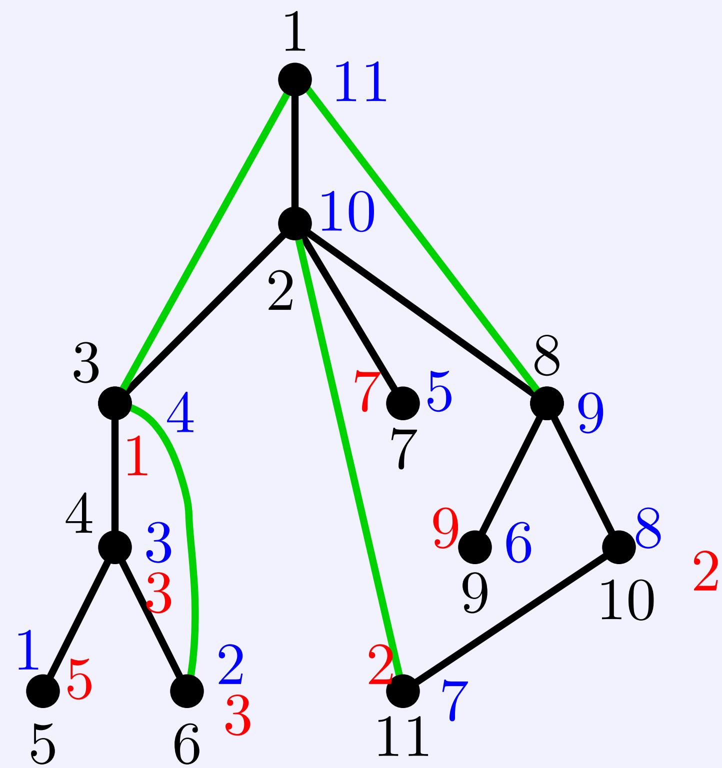
mélységi szám

befejezési szám

fel$[v]$

Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min} \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \longrightarrow z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



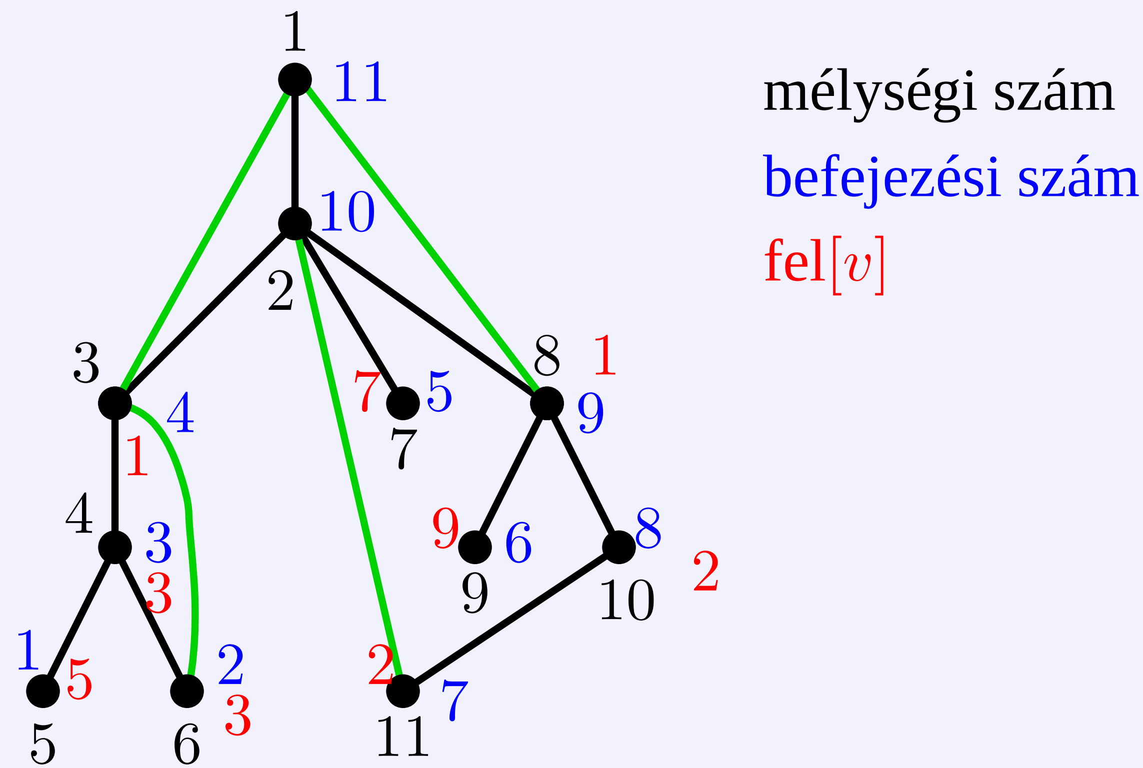
mélységi szám

befejezési szám

fel[v]

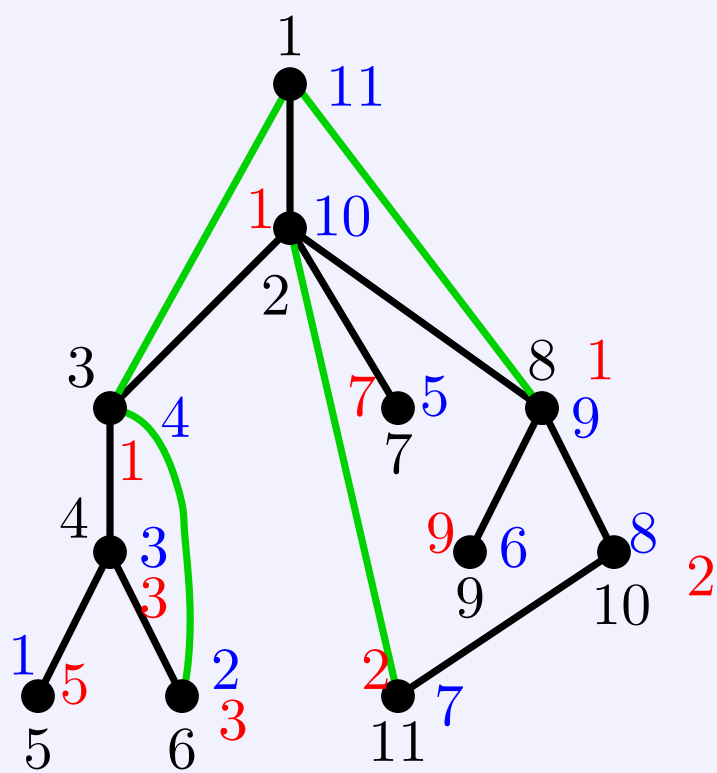
Példa

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



Példa

$$\text{fel}[v] = \mathbf{min}\left\{\begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \mathbf{min}\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \longrightarrow z \text{ visszaél}\}, \\ \mathbf{min}\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array}\right\}$$



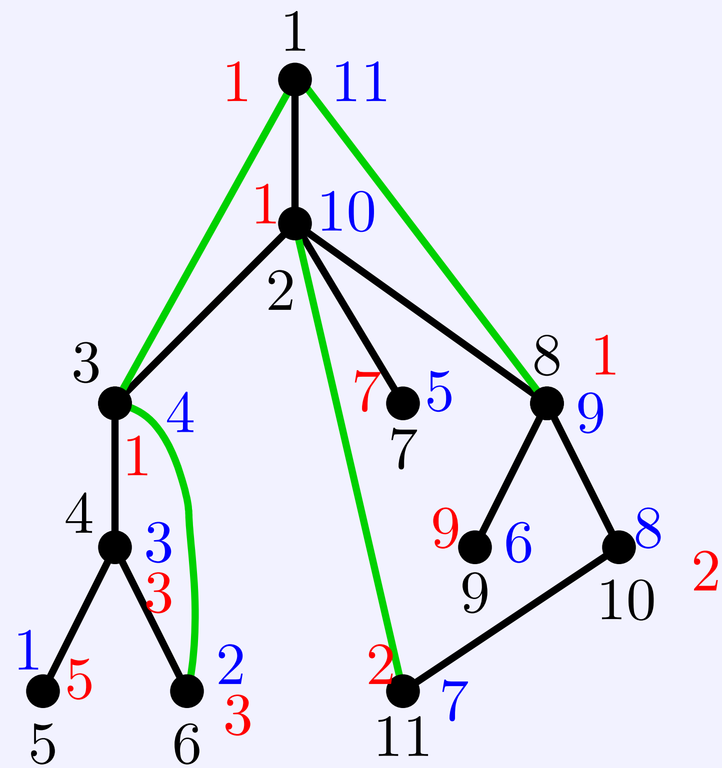
mélységi szám

befejezési szám

fel$[v]$

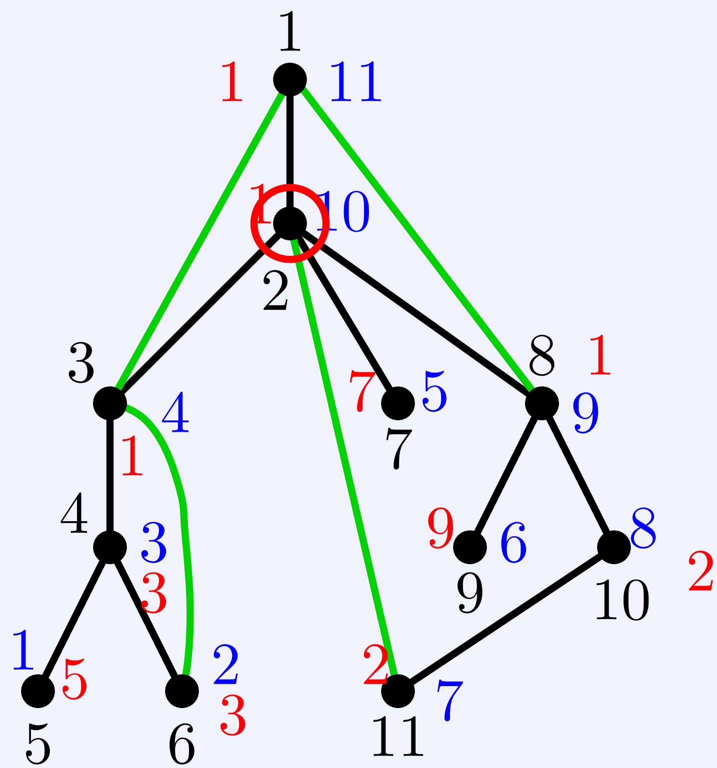
Példa

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



Példa

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z],\ \text{ahol } v \to z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y],\ \text{ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



mélységi szám

befejezési szám

$\text{fel}[v]$