

Algoritmuselmélet 9. előadás

Katona Gyula Y.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Számítástudományi Tsz.

I. B. 137/b

kiskat@cs.bme.hu

2002 Március 18.

Mélységi feszítőerdő

Legyen T a $G = (V, E)$ irányított gráf egy feszítő erdeje. Legyen $x \in V$ egy tetszőleges csúcs, és jelölje T_x a feszítő erdő x -gyökerű részfájának a csúcshalmazát. Legyen

$$S_x = \left\{ y \in V \mid \begin{array}{l} \text{van olyan } G\text{-beli } x \rightsquigarrow y \text{ irányított út, amelyen} \\ \text{a csúcsok mélységi száma legalább } \text{mszám}[x] \end{array} \right\}.$$

Tétel. Tetszőleges $x \in V$ csúcs esetén érvényes a $T_x = S_x$ egyenlőség.

Tétel. Tetszőleges $x \in V$ csúcs esetén érvényes a $T_x = S_x$ egyenlőség.

Bizonyítás: T_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x -ből faélek mentén elérhetők. \implies faélekre mindig nő a mélységi szám $\implies T_x \subseteq S_x$

Fordított irány indirekt:

tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $y \in S_x \setminus T_x$

Legyen $x \rightsquigarrow y$ egy az S_x meghatározásában szereplő irányított út, feltehetjük, hogy az út utolsó előtti v pontja T_x -ben van.

Az $y \in S_x$ feltétel szerint $\text{mszám}[y] > \text{mszám}[x] \implies y \notin T_x$ miatt azt jelenti, hogy y -t valamikor a T_x pontjai után látogatjuk meg $\implies (v, y)$ faél vagy előre él $\implies y \in T_x \implies S_x \subseteq T_x \quad \checkmark$

Következmény. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf x csúcsából minden pont elérhető irányított úton. Tegyük fel továbbá, hogy a G mélységi bejárását x -szel kezdjük. Ekkor a mélységi feszítő erdő egyetlen fából áll.

Bizonyítás: $\text{mszám}[x] = 1 \implies S_x = V \implies T_x = V$

Irányított körmentes gráfok

Definíció. Egy G irányított gráf **DAG**, ha nem tartalmaz irányított kört.

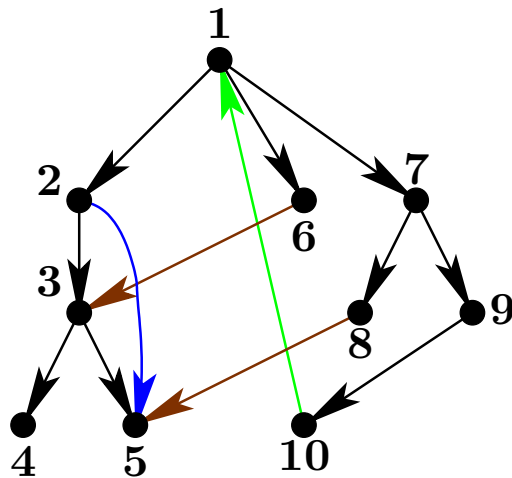
Directed **A**cylic **G**raph

Alkalmazásai például:

- Teendők ütemezése \implies PERT
- Várakozási gráfok \implies adatbázisok

Fontos, hogy egy irányított gráfról el tudjuk dönteni, tartalmaz-e irányított kört.

DAG



faél
előreél
visszaél
keresztél

Ha a gráf egy mélységi bejárása során találunk visszaélet akkor a gráf nyilván tartalmaz irányított kört, azaz nem DAG.

Tétel. Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf. Ha G egy DAG, akkor egyetlen mélységi bejárása során sincs visszaél. Fordítva: ha G -nek van olyan mélységi bejárása, amelyre nézve nincs visszaél, akkor G egy DAG.

Bizonyítás: \implies ✓

\Leftarrow tegyük fel, hogy G nem DAG \implies van benne irányított kör \implies vegyük ennek a legkisebb mélységi számú v csúcsát, a kör előző pontja legyen u

\implies $\text{mszám}[v] < \text{mszám}[u] \implies$ vissza- vagy keresztél

de u elérhető v -ből irányított úton ; (részfa lemma) $\implies u$ a v leszármazottja

\implies visszaél ✓

DAG topologikus rendezése

Definíció. Legyen $G = (V, E)$ ($|V| = n$) egy irányított gráf. G egy **topologikus rendezése** a csúcsoknak egy olyan v_1, \dots, v_n sorrendje, melyben $x \rightarrow y \in E$ esetén x előbb van, mint y (azaz ha $x = v_i, y = v_j$, akkor $i < j$).

Tétel. Egy irányított gráfnak akkor és csak akkor van topologikus rendezése, ha DAG.

Bizonyítás: \Rightarrow : Ha G nem DAG, akkor nem lehet topologikus rendezése, mert egy irányított kör csúcsainak nyilván nincs megfelelő sorrendje.

\Leftarrow : G -ben van olyan csúcs, amibe nem fut be él (forrás)

Indukció pontszámra \implies hagyjunk el egy forrást, ez legyen az első pont

\implies a többi az indukció miatt rendezhető w_1, \dots, w_{n-1}

$\implies x, w_1, \dots, w_{n-1}$ ✓

Topologikus rendezés mélységi kereséssel

Tétel. Végezzük el a G DAG egy mélységi bejárását és írjuk ki G csúcsait a befejezési számaik szerint növekvő w_1, \dots, w_n sorrendben. A w_n, w_{n-1}, \dots, w_1 sorrend a G DAG egy topologikus rendezése.

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy ha $w_i \rightarrow w_j$ éle G -nek, akkor $i > j$.
Ha volna olyan $w_i \rightarrow w_j$, amire $j = \text{bszám}[w_j] > \text{bszám}[w_i] = i$, akkor az csak visszaél lehetne. ⚡

Lépésszám: $O(n + e)$

Legrövidebb utak DAG-ban

Legrövidebb utak egy forrásból:

Bellman-Ford $\implies O(n^3)$

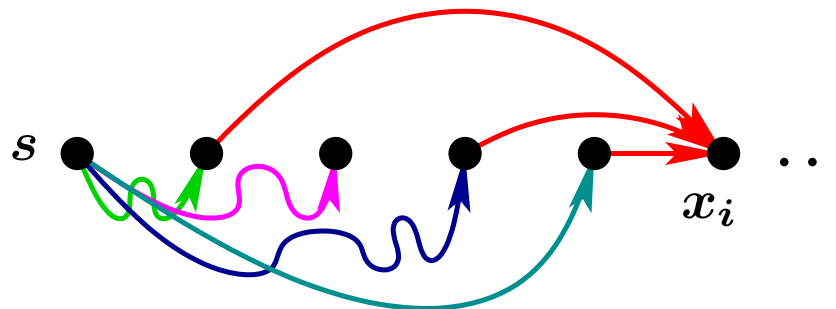
Ha nincs negatív élsúly:

Dijkstra: $\implies O(n^2)$

Vegyünk egy topologikus rendezést: x_1, x_2, \dots, x_n

Feltehetjük, hogy $s = x_1 \implies$

$$d(s, x_i) = \min_{(x_j, x_i) \in E} \{d(s, x_j) + c(x_j, x_i)\},$$



Ezt sorban elvégezzük minden i -re.

Lépésszám: $O(n + e)$

Leghosszabb utak DAG-ban

Leghosszabb út \implies egyszerű út

Általában nehéz, nem ismert rá gyors algoritmus.

DAG-ban van:

Tétel. Ha G egy éllistával adott súlyozott élű DAG, akkor az egy forrásból induló legrövidebb és leghosszabb utak meghatározásának feladatai $O(n + e)$ lépésben megoldhatók.

Bizonyítás: DAG-ban minden út csak előre megy \implies

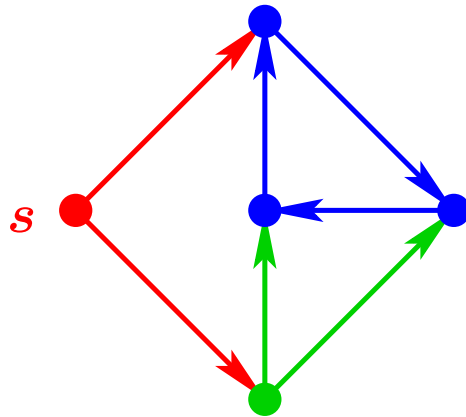
$$l(s, x_i) = \max_{(x_j, x_i) \in E} \{l(s, x_j) + c(x_j, x_i)\}.$$

ahol $l(s, x_i)$ a leghosszabb $s \rightsquigarrow x_i$ út hossza

Alkalmazás: PERT

Erősen összefüggő (erős) komponensek

Definíció. Egy $G = (V, E)$ irányított gráf erősen összefüggő, ha bármely $u, v \in V$ pontpárra létezik $u \rightsquigarrow v$ irányított út.



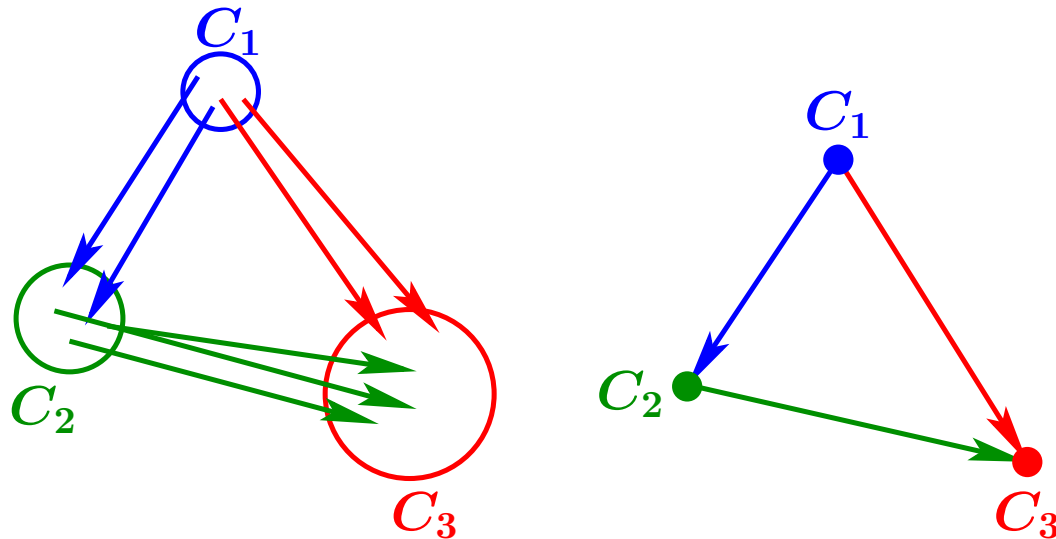
Definíció. Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf. Bevezetünk egy relációt V -n: $u, v \in V$ -re legyen $u \approx v$, ha G -ben léteznek $u \rightsquigarrow v$ és $v \rightsquigarrow u$ irányított utak.

Ez ekvivalenciareláció \implies

Definíció. A \approx reláció ekvivalenciaosztályait a G erősen összefüggő (erős) komponenseinek nevezzük.

Tétel. Egy irányított gráf két erős komponense között az élek csak egy irányba mehetnek.

Bizonyítás: Ha lenne él a $C_1 \rightarrow C_2$ és $C_2 \rightarrow C_1$ -be is, akkor C_1 és C_2 ugyanabban az erős komponensben volna.



Definíció. Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf. G **redukált gráfja** egy irányított gráf, melynek pontjai a G erős komponensei; a C_1, C_2 komponensek között akkor van $C_1 \rightarrow C_2$ él, ha G -ben a C_1 komponens valamely pontjából vezet él a C_2 komponensbe.

A redukált gráf mindig DAG lesz. $\Leftarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots \rightarrow C_k \rightarrow C_1$ irányított kör a redukált gráfban azt jelentené, hogy $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ a G ugyanazon erős komponensében van.

Erősen összefüggő komponensek meghatározása

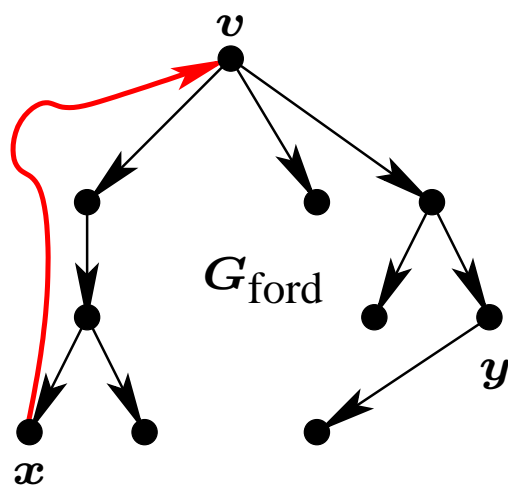
- (1) Mélységi bejárással végigmegyünk G -n, közben minden pontnak sorszámot adunk: a befejezési számát
- (2) Elkészítjük a G_{ford} gráfot, melyet úgy kapunk G -ből, hogy minden él irányítását megfordítjuk. Pontosabban: $G_{\text{ford}} := (V, E')$, ahol $u \rightarrow v \in E'$ akkor és csak akkor, ha $v \rightarrow u \in E$.
- (3) Bejárjuk a G_{ford} gráfot mélységi bejárással, a legnagyobb sorszámú csúccsal kezdve (az (1)-beli befejezési számozás szerint). Új gyökérpont választásakor mindig a legnagyobb sorszámú csúcsot vesszük a maradékból.

Tétel. A (3) pontban kapott fák lesznek G erős komponensei, azaz G -ben $x \approx y$ pontosan akkor igaz, ha x és y egy fában vannak.

Bizonyítás: \Rightarrow : Azt kell belátni, hogy egy erős komponens pontjai egy fába kerülnek

Legyen K egy erős komponens, és legyen x a K legkisebb mélységi számú pontja.

$\Rightarrow K \subseteq S_x \iff$ részfa-lemma \checkmark



\Leftarrow : Tegyük fel, hogy x és y egy fában vannak a (3) pont szerinti mélységi bejárás után. Azt kell belátnunk, hogy ekkor $x \approx y$ a G gráfban, azaz x és y egymásból irányított úton elérhetők.

Legyen a v csúcs a gyökere annak a fának, mely x -et és y -t is tartalmazza.

$\Rightarrow G_{\text{ford}}$ gráfban van $v \rightsquigarrow x$ irányított út, $\Rightarrow G$ gráfban van egy L irányított út $x \rightsquigarrow v$ -be.

Legyen x' az L -nek az a pontja, amelynek az első bejárás szerinti mélységi száma a legkisebb.

részfa-lemma $\Rightarrow L$ -nek az $x' \rightsquigarrow v$ darabjában levő csúcsok az (1) bejárásnál x' leszármazottjai lesznek.

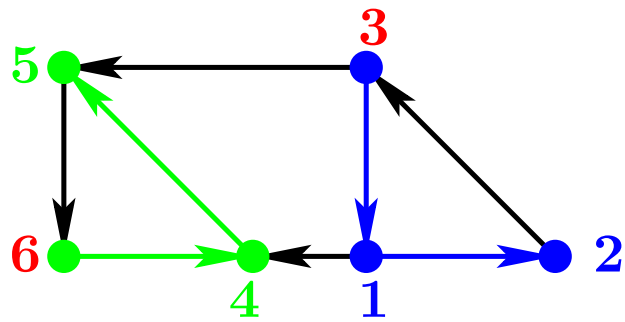
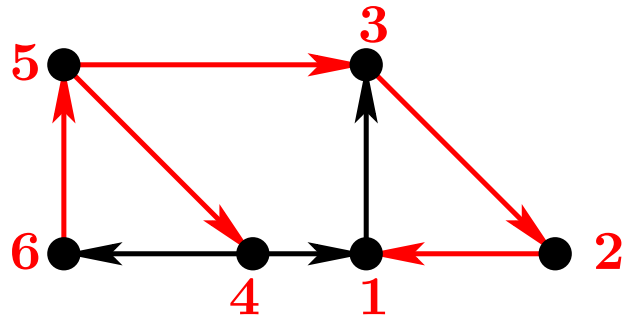
Az x' gyökerű részében x' befejezési száma a legnagyobb $\implies v$ nem választhattuk v -t gyökérnek $\implies x' = v$.

Az L pontjai közül tehát v -t látogattuk meg legelőször, és v -nek a befejezési száma volt a legnagyobb. \implies Így G -ben van $v \rightsquigarrow x$

$\implies x \approx v$, hasonlóan $y \approx v \implies x \approx y$ ✓

Lépésszám: $O(n + e) + O(e) + O(n + e) = O(n + e)$

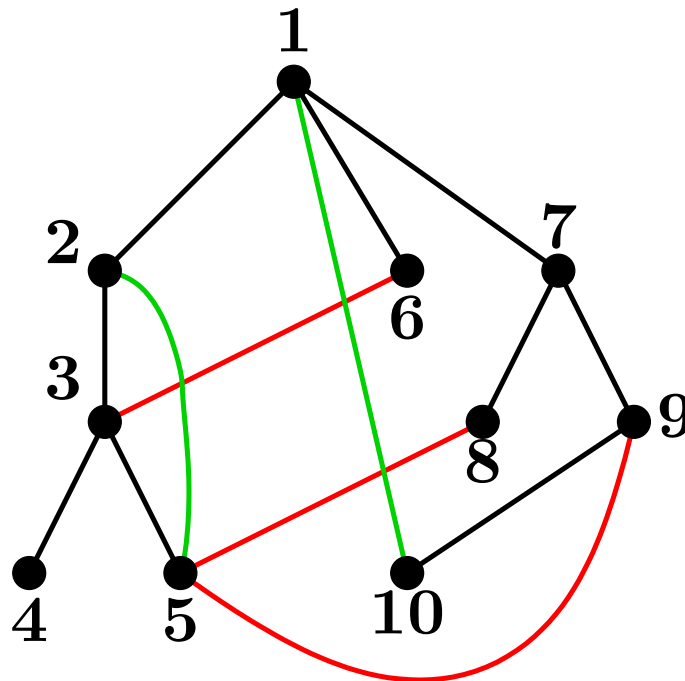
Példa



Írányítatlan gráfok mélységi bejárása

Mélységi keresés ugyanígy.

Mélységi feszítő erdő komponensei \implies összefüggő komponensek



faél

visszaél

ilyen nincs

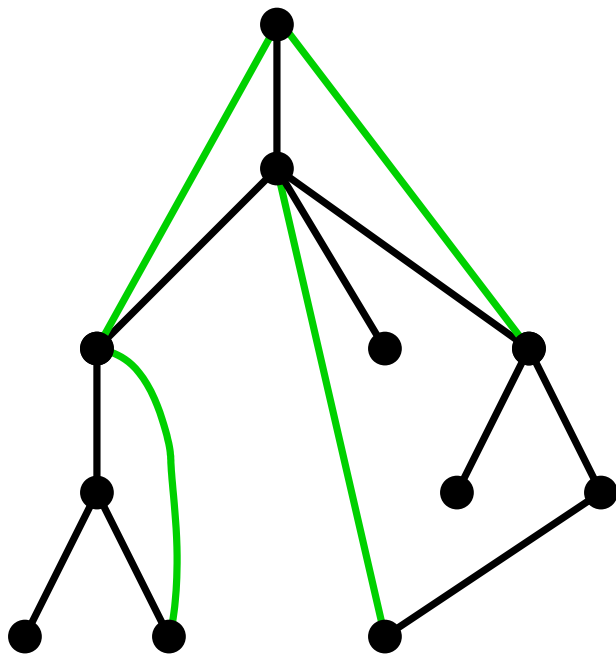
faél \iff faél

előreél, visszaél \iff visszaél

keresztél \implies nem létezik

Artikulációs pont keresése

Definíció. Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf. A $v \in V$ csúcs **artikulációs (elvágó) pontja** G -nek, ha v és a rá illeszkedő élek elhagyásával a gráf több komponensre esik szét.



A fa gyökere pontosan akkor artikulációs pontja a gráfnak, ha egynél több fia van

Ha elhagyunk egy v csúcsot \implies A visszaélek csak úgy tarthatják egybe a részfákat, ha a v alatti nem üres részfák mindegyikéből megy visszaél a v feletti feszítőfadarabba.

Kiszámítjuk a $fel[v]$ értéket. Ez megadja a v csúcshoz annak a „feszítőfában legmagasabban levő” w csúcsnak a mélységi számát, amelyhez el tudunk jutni v -ből úgy, hogy „lefelé” megyünk faélen, aztán egy visszaélen „felmegyünk” w -be.

A v csúcs tehát artikulációs pont \iff van olyan w fia, melyre $fel[w] \geq mszám[v]$.

Algoritmus

1. Végezzük el a gráf mélységi bejárását, és határozzuk meg a csúcsok mélységi számát
2. Számítsuk ki minden v csúcsra a $fel[v]$ értéket \implies Járjuk be a feszítőfát a befejezési számok szerinti sorrendben, és ebben a sorrendben töltsük ki a $fel[]$ tömböt.

$$fel[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} mszám[v], \\ \min\{mszám[z], \text{ ahol } v \rightarrow z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{fel[y], \text{ ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$

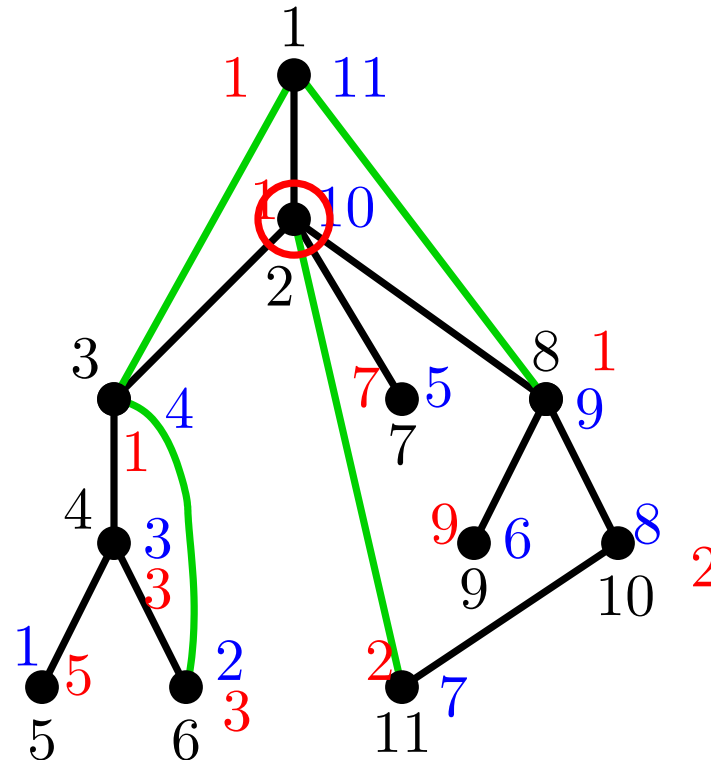
3. **Artikulációs pontok megkeresése:** a feszítőfát bejárva a csúcsokról ellenőrizzük, hogy elvágó pontok-e.

- (a) a gyökér pontosan akkor artikulációs pont, ha legalább 2 fia van a fában.
- (b) a gyökértől különböző v csúcs akkor és csak akkor artikulációs pont, ha van v -nek olyan y fia, hogy $fel[y] \geq mszám[v]$.

Lépésszám: $O(n + e)$

Példa

$$\text{fel}[v] = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{mszám}[v], \\ \min\{\text{mszám}[z], \text{ ahol } v \rightarrow z \text{ visszaél}\}, \\ \min\{\text{fel}[y], \text{ ahol } y \text{ fia } v\text{-nek}\} \end{array} \right\}$$



mélységi szám

befejezési szám

 $\text{fel}[v]$