Algoritmuselmélet 8. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu

2002 Március 12.

Dijkstra animációk

Java animáció: Dijkstra-algoritmus, másik, harmadik

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.
Kupacépítés $O(n)$ költség, (2) ciklusban minimumkeresést $O(\log n)$ költségű MINTÖR

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.
Kupacépítés $O(n)$ költség, (2) ciklusban minimumkeresést $O(\log n)$ költségű MINTÖR
A $D[\ ]$ értékek újraszámolását és a kupac-tulajdonság helyreállítását csak a választott csúcs szomszédaira kell elvégezni.

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.
Kupacépítés $O(n)$ költség, (2) ciklusban minimumkeresést $O(\log n)$ költségű MINTÖR
A $D[\ ]$ értékek újraszámolását és a kupac-tulajdonság helyreállítását csak a választott csúcs szomszédaira kell elvégezni.
Minden csúcsot pontosan egyszer választunk ki, és a szomszédok számának összege e. $\Longrightarrow$ Összidőigény $O((n+e)\log n)$.

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.
Kupacépítés $O(n)$ költség, (2) ciklusban minimumkeresést $O(\log n)$ költségű MINTÖR
A $D[\ ]$ értékek újraszámolását és a kupac-tulajdonság helyreállítását csak a választott csúcs szomszédaira kell elvégezni.
Minden csúcsot pontosan egyszer választunk ki, és a szomszédok számának összege e. $\Longrightarrow$ Összidőigény $O((n+e)\log n)$.

Java animáció: Dijkstra-algoritmus

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.
Kupacépítés $O(n)$ költség, (2) ciklusban minimumkeresést $O(\log n)$ költségű MINTÖR
A $D[\ ]$ értékek újraszámolását és a kupac-tulajdonság helyreállítását csak a választott csúcs szomszédaira kell elvégezni.
Minden csúcsot pontosan egyszer választunk ki, és a szomszédok számának összege e. $\Longrightarrow$ Összidőigény $O((n+e)\log n)$.

Java animáció: Dijkstra-algoritmus

Sűrű gráfokra $\Longrightarrow$ d-kupac.

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.
Kupacépítés $O(n)$ költség, (2) ciklusban minimumkeresést $O(\log n)$ költségű MINTÖR
A $D[\ ]$ értékek újraszámolását és a kupac-tulajdonság helyreállítását csak a választott csúcs szomszédaira kell elvégezni.
Minden csúcsot pontosan egyszer választunk ki, és a szomszédok számának összege e. $\Longrightarrow$ Összidőigény $O((n+e)\log n)$.

Java animáció: Dijkstra-algoritmus

Sűrű gráfokra $\Longrightarrow$ d-kupac.
$\Longrightarrow O(n + nd\log_d n + e\log_d n)$

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.
Kupacépítés $O(n)$ költség, (2) ciklusban minimumkeresést $O(\log n)$ költségű MINTÖR
A $D[\ ]$ értékek újraszámolását és a kupac-tulajdonság helyreállítását csak a választott csúcs szomszédaira kell elvégezni.
Minden csúcsot pontosan egyszer választunk ki, és a szomszédok számának összege e. $\Longrightarrow$ Összidőigény $O((n+e)\log n)$.

Java animáció: Dijkstra-algoritmus

Sűrű gráfokra $\Longrightarrow$ d-kupac.
$\Longrightarrow O(n + nd\log_d n + e\log_d n)$
Ha $n^{1,5} \leq e \leq n^2$ és legyen $d = \lceil e/n \rceil$ $\Longrightarrow d \geq \sqrt{n}$ $\Longrightarrow \log_d n \leq 2$.

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.
Kupacépítés $O(n)$ költség, (2) ciklusban minimumkeresést $O(\log n)$ költségű MINTÖR
A $D[\ ]$ értékek újraszámolását és a kupac-tulajdonság helyreállítását csak a választott csúcs szomszédaira kell elvégezni.
Minden csúcsot pontosan egyszer választunk ki, és a szomszédok számának összege e. $\Longrightarrow$ Összidőigény $O((n+e)\log n)$.

Java animáció: Dijkstra-algoritmus

Sűrű gráfokra $\Longrightarrow$ d-kupac.
$\Longrightarrow O(n + nd\log_d n + e\log_d n)$
Ha $n^{1,5} \le e \le n^2$ és legyen $d = \lceil e/n \rceil$ $\Longrightarrow d \ge \sqrt{n}$ $\Longrightarrow \log_d n \le 2$.
$\Longrightarrow$
$O(n+nd\log_d n+e\log_d n) = O(n+nd+e) = O(n+n\cdot e/n+e) = O(e)$.

Dijkstra algoritmusa éllistával

Ha kevés él van $\Longrightarrow$ gráfot éllistával tároljuk.
$V \setminus$KÉSZ csúcsait *kupacba rendezve* tartjuk a $D[\ ]$ érték szerint.
Kupacépítés $O(n)$ költség, (2) ciklusban minimumkeresést $O(\log n)$ költségű MINTÖR
A $D[\ ]$ értékek újraszámolását és a kupac-tulajdonság helyreállítását csak a választott csúcs szomszédaira kell elvégezni.
Minden csúcsot pontosan egyszer választunk ki, és a szomszédok számának összege e. $\Longrightarrow$ Összidőigény $O((n+e)\log n)$.

Java animáció: Dijkstra-algoritmus

Sűrű gráfokra $\Longrightarrow$ d-kupac.
$\Longrightarrow O(n + nd\log_d n + e\log_d n)$
Ha $n^{1,5} \le e \le n^2$ és legyen $d = \lceil e/n \rceil$ $\Longrightarrow d \ge \sqrt{n}$ $\Longrightarrow \log_d n \le 2$.
$\Longrightarrow$
$O(n+nd\log_d n+e\log_d n) = O(n+nd+e) = O(n+n\cdot e/n+e) = O(e)$.

Dijkstra irányítatlan gráfokra is működik.

A legrövidebb utak nyomon-követése

Minden pontra tárolunk és karbantartunk egy $P[x]$ csúcsot is, ami megadja egy az eddig ismert hozzá vezető legrövidebb úton az utolsó előtti csúcsot.

A legrövidebb utak nyomon-követése

Minden pontra tárolunk és karbantartunk egy $P[x]$ csúcsot is, ami megadja egy az eddig ismert hozzá vezető legrövidebb úton az utolsó előtti csúcsot.

Kezdetben $P[v] := s$ minden $v \in V$-re.

A legrövidebb utak nyomon-követése

Minden pontra tárolunk és karbantartunk egy $P[x]$ csúcsot is, ami megadja egy az eddig ismert hozzá vezető legrövidebb úton az utolsó előtti csúcsot.

Kezdetben $P[v] := s$ minden $v \in V$-re.
$\Longrightarrow$ (3) ciklus belsejében, ha egy külső w csúcs $D[w]$ értékét megváltoztatjuk, akkor $P[w] := x$.

Lépésszám: $O(n^2)$

A Bellman—Ford-módszer

Feladat. *Egy pontból induló legrövidebb utak (hosszának) meghatározására, ha bizonyos élsúlyok negatívak. De feltesszük, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört.*

A Bellman—Ford-módszer

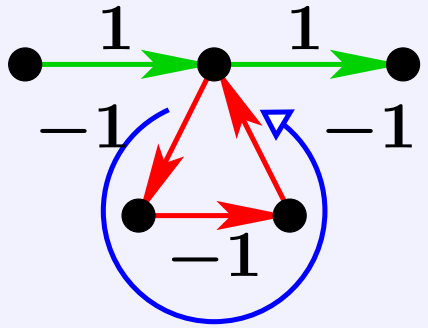
Feladat. *Egy pontból induló legrövidebb utak (hosszának) meghatározására, ha bizonyos élsúlyok negatívak. De feltesszük, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört.*

Ha van negatív összhosszúságú irányított kör, akkor a legrövidebb út ∞.

A Bellman—Ford-módszer

Feladat. *Egy pontból induló legrövidebb utak (hosszának) meghatározására, ha bizonyos élsúlyok negatívak. De feltesszük, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört.*

Ha van negatív összhosszúságú irányított kör, akkor a legrövidebb út ∞.

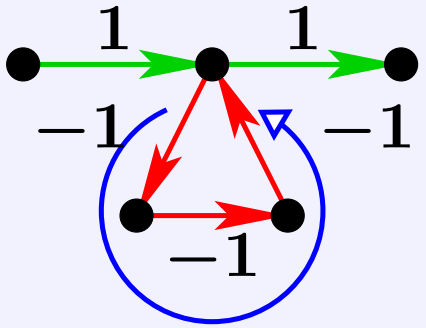


Legyen a $G = (V, E)$ súlyozott élű irányított gráf a C adjacencia-mátrixával adott az i, j helyzetű elem a $c(i, j)$ élsúly, ha $i \to j$ éle G-nek, a többi elem pedig ∞).

A Bellman—Ford-módszer

Feladat. *Egy pontból induló legrövidebb utak (hosszának) meghatározására, ha bizonyos élsúlyok negatívak. De feltesszük, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört.*

Ha van negatív összhosszúságú irányított kör, akkor a legrövidebb út ∞.



Legyen a $G = (V, E)$ súlyozott élű irányított gráf a C adjacencia-mátrixával adott az i, j helyzetű elem a $c(i, j)$ élsúly, ha $i \to j$ éle G-nek, a többi elem pedig ∞).
Legyen $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ és $s = 1 \iff s$-ből induló utakat keressük

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1 : n-1, 1 : n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1:n-1, 1:n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

$(*)$ $\quad T[i,j] =$ a legrövidebb olyan $1 \rightsquigarrow j$ irányított utak hossza, melyek legfeljebb i élből állnak.

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1:n-1, 1:n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

$(*)$ $\quad T[i,j] =$ a legrövidebb olyan $1 \rightsquigarrow j$ irányított utak hossza, melyek legfeljebb i élből állnak.

$\Longrightarrow T[n-1, j]$ a legrövidebb $1 \rightsquigarrow j$ utak hossz

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1:n-1, 1:n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

$(*)$ $\quad T[i,j] =$ a legrövidebb olyan $1 \rightsquigarrow j$ irányított utak hossza, melyek legfeljebb i élből állnak.

$\Longrightarrow T[n-1, j]$ a legrövidebb $1 \rightsquigarrow j$ utak hossz

A $T[1, j]$ sor kitöltése $\Longrightarrow$

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1:n-1, 1:n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

$(*)$ $\quad T[i,j] =$ a legrövidebb olyan $1 \rightsquigarrow j$ irányított utak hossza, melyek legfeljebb i élből állnak.

$\Longrightarrow T[n-1, j]$ a legrövidebb $1 \rightsquigarrow j$ utak hossz

A $T[1,j]$ sor kitöltése $\Longrightarrow T[1,j] = C[1,j]$

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1:n-1, 1:n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

$(*)$ $\quad T[i,j] =$ a legrövidebb olyan $1 \rightsquigarrow j$ irányított utak hossza, melyek legfeljebb i élből állnak.

$\Longrightarrow T[n-1, j]$ a legrövidebb $1 \rightsquigarrow j$ utak hossz

A $T[1,j]$ sor kitöltése $\Longrightarrow T[1,j] = C[1,j]$
Tegyük fel ezután, hogy az i-edik sort már kitöltöttük
$\Longrightarrow T[i,1], T[i,2], \ldots, T[i,n]$ értékekre $(*)$ igaz.

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1:n-1, 1:n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

$(*)$ $\quad T[i,j] =$ a legrövidebb olyan $1 \rightsquigarrow j$ irányított utak hossza, melyek legfeljebb i élből állnak.

$\Longrightarrow T[n-1, j]$ a legrövidebb $1 \rightsquigarrow j$ utak hossz

A $T[1,j]$ sor kitöltése $\Longrightarrow T[1,j] = C[1,j]$
Tegyük fel ezután, hogy az i-edik sort már kitöltöttük
$\Longrightarrow T[i,1], T[i,2], \ldots, T[i,n]$ értékekre $(*)$ igaz. $\Longrightarrow$

$$(**) \qquad T[i+1,j] := \min\{T[i,j], \min_{k \neq j}\{T[i,k] + C[k,j]\}\}$$

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1:n-1, 1:n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

$(*)$ $\quad T[i,j] =$ a legrövidebb olyan $1 \rightsquigarrow j$ irányított utak hossza, melyek legfeljebb i élből állnak.

$\Longrightarrow T[n-1, j]$ a legrövidebb $1 \rightsquigarrow j$ utak hossz

A $T[1,j]$ sor kitöltése $\Longrightarrow T[1,j] = C[1,j]$
Tegyük fel ezután, hogy az i-edik sort már kitöltöttük
$\Longrightarrow T[i,1], T[i,2], \ldots, T[i,n]$ értékekre $(*)$ igaz. $\Longrightarrow$

$(**)$ $\quad T[i+1,j] := \min\{T[i,j], \min_{k \neq j}\{T[i,k] + C[k,j]\}\}$

$\Longleftarrow$ Ugyanis egy legfeljebb $i+1$ élből álló $\pi = 1 \rightsquigarrow j$ út kétféle lehet:

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1:n-1, 1:n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

$(*)$ $\quad T[i,j] =$ a legrövidebb olyan $1 \rightsquigarrow j$ irányított utak hossza, melyek legfeljebb i élből állnak.

$\Longrightarrow T[n-1,j]$ a legrövidebb $1 \rightsquigarrow j$ utak hossz

A $T[1,j]$ sor kitöltése $\Longrightarrow T[1,j] = C[1,j]$
Tegyük fel ezután, hogy az i-edik sort már kitöltöttük
$\Longrightarrow T[i,1], T[i,2], \ldots, T[i,n]$ értékekre $(*)$ igaz. $\Longrightarrow$

$(**)$ $\quad T[i+1,j] := \min\{T[i,j], \min_{k \neq j}\{T[i,k] + C[k,j]\}\}$

$\Longleftarrow$ Ugyanis egy legfeljebb $i+1$ élből álló $\pi = 1 \rightsquigarrow j$ út kétféle lehet:
(a) Az útnak kevesebb, mint $i+1$ éle van. Ekkor ennek a hossza szerepel $T[i,j]$-ben.

Módszer $\Longrightarrow$ egy $T[1:n-1, 1:n]$ táblázat sorról sorra haladó kitöltése.

$(*)$ $\quad T[i,j] =$ a legrövidebb olyan $1 \rightsquigarrow j$ irányított utak hossza, melyek legfeljebb i élből állnak.

$\Longrightarrow T[n-1, j]$ a legrövidebb $1 \rightsquigarrow j$ utak hossz

A $T[1,j]$ sor kitöltése $\Longrightarrow T[1,j] = C[1,j]$
Tegyük fel ezután, hogy az i-edik sort már kitöltöttük
$\Longrightarrow T[i,1], T[i,2], \ldots, T[i,n]$ értékekre $(*)$ igaz. $\Longrightarrow$

$(**)$ $\quad T[i+1,j] := \min\{T[i,j], \min_{k \neq j}\{T[i,k] + C[k,j]\}\}$

$\Longleftarrow$ Ugyanis egy legfeljebb $i+1$ élből álló $\pi = 1 \rightsquigarrow j$ út kétféle lehet:
(a) Az útnak kevesebb, mint $i+1$ éle van. Ekkor ennek a hossza szerepel $T[i,j]$-ben.
(b) Az út éppen $i+1$ élből áll. Legyen l a π út utolsó előtti pontja. Ekkor a π út $1 \rightsquigarrow l$ szakasza i élből áll, és minimális hosszúságú a legfeljebb i élű $1 \rightsquigarrow l$ utak között $\Longrightarrow \pi$ hossza $T[i,l] + C[l,j]$.

Lépésszám: Egy érték $(**)$ szerinti számítása $n-1$ összeadás és ugyanennyi összehasonlítás (minimumkeresés n elem közül)

Lépésszám: Egy érték $(**)$ szerinti számítása $n-1$ összeadás és ugyanennyi összehasonlítás (minimumkeresés n elem közül)
$\Longrightarrow \boldsymbol{O(n^3)}$ műveletet

Lépésszám: Egy érték $(**)$ szerinti számítása $n-1$ összeadás és ugyanennyi összehasonlítás (minimumkeresés n elem közül)

$\Longrightarrow$ $O(n^3)$ műveletet

Java animáció: Bellman-Ford algoritmus

Floyd módszere

Feladat. *Miként lehet egy irányított gráfban az összes pontpár távolságát meghatározni?*

Floyd módszere

Feladat. *Miként lehet egy irányított gráfban az összes pontpár távolságát meghatározni?*

≥ 0 élsúlyok $\Longrightarrow$ ha a Dijkstra-algoritmust minden csúcsra mint forrásra lefuttatjuk $\Longrightarrow$ $nO(n^2) = O(n^3)$

Floyd módszere

Feladat. *Miként lehet egy irányított gráfban az összes pontpár távolságát meghatározni?*

≥ 0 élsúlyok $\Longrightarrow$ ha a Dijkstra-algoritmust minden csúcsra mint forrásra lefuttatjuk $\Longrightarrow n\boldsymbol{O}(n^2) = \boldsymbol{O}(n^3)$

Van olyan, ami nem lassabb és működik negatív élsúlyokra is, ha nincs negatív összsúlyú kör.

Floyd módszere

Feladat. *Miként lehet egy irányított gráfban az összes pontpár távolságát meghatározni?*

≥ 0 élsúlyok $\Longrightarrow$ ha a Dijkstra-algoritmust minden csúcsra mint forrásra lefuttatjuk $\Longrightarrow$ $nO(n^2) = O(n^3)$

Van olyan, ami nem lassabb és működik negatív élsúlyokra is, ha nincs negatív összsúlyú kör.

Feladat. *Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf, és egy $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény úgy, hogy a gráfban nincs negatív összsúlyú irányított kör. Határozzuk meg az összes $v, w \in V$ rendezett pontpárra a $d(v, w)$ távolságot.*

A G gráf a C adjacencia-mátrixával adott.

A G gráf a C adjacencia-mátrixával adott.
Egy szintén $n \times n$-es F mátrixot fogunk használni a számításhoz.

A G gráf a C adjacencia-mátrixával adott.
Egy szintén $n \times n$-es F mátrixot fogunk használni a számításhoz.
Kezdetben $F[i,j] := C[i,j]$.

A G gráf a C adjacencia-mátrixával adott.
Egy szintén $n \times n$-es F mátrixot fogunk használni a számításhoz.
Kezdetben $F[i,j] := C[i,j]$.
$\Longrightarrow$ ciklus $\Longrightarrow$ k-adik lefutása után $F[i,j]$ azon $i \rightsquigarrow j$ utak legrövidebbjeinek a hosszát tartalmazza, amelyek közbülső pontjai k-nál nem nagyobb sorszámúak

A G gráf a C adjacencia-mátrixával adott.
Egy szintén $n \times n$-es F mátrixot fogunk használni a számításhoz.
Kezdetben $F[i,j] := C[i,j]$.
$\Longrightarrow$ ciklus $\Longrightarrow$ k-adik lefutása után $F[i,j]$ azon $i \rightsquigarrow j$ utak legrövidebbjeinek a hosszát tartalmazza, amelyek közbülső pontjai k-nál nem nagyobb sorszámúak

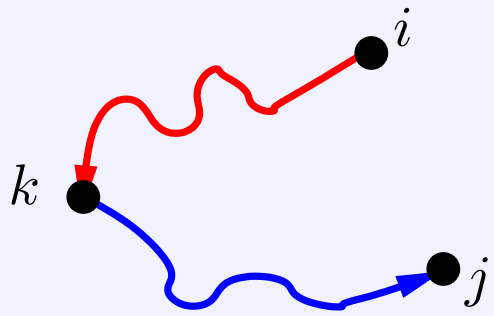
Az új $F_k[i,j]$ értékeket kiszámíthatjuk ha ismerjük $F_{k-1}[i,j]$-t $\forall i,j$-re

A G gráf a C adjacencia-mátrixával adott.
Egy szintén $n \times n$-es F mátrixot fogunk használni a számításhoz.
Kezdetben $F[i,j] := C[i,j]$.
$\Longrightarrow$ ciklus $\Longrightarrow$ k-adik lefutása után $F[i,j]$ azon $i \rightsquigarrow j$ utak legrövidebbjeinek a hosszát tartalmazza, amelyek közbülső pontjai k-nál nem nagyobb sorszámúak

Az új $F_k[i,j]$ értékeket kiszámíthatjuk ha ismerjük $F_{k-1}[i,j]$-t $\forall i,j$-re
Egy legrövidebb $i \rightsquigarrow j$ út, melyen a közbülső pontok sorszáma legfeljebb k, vagy tartalmazza a k csúcsot vagy nem.

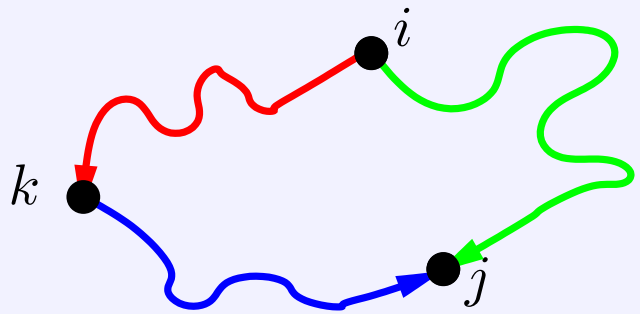
A G gráf a C adjacencia-mátrixával adott.
Egy szintén $n \times n$-es F mátrixot fogunk használni a számításhoz.
Kezdetben $F[i,j] := C[i,j]$.
$\Longrightarrow$ ciklus $\Longrightarrow$ k-adik lefutása után $F[i,j]$ azon $i \rightsquigarrow j$ utak legrövidebbjeinek a hosszát tartalmazza, amelyek közbülső pontjai k-nál nem nagyobb sorszámúak

Az új $F_k[i,j]$ értékeket kiszámíthatjuk ha ismerjük $F_{k-1}[i,j]$-t $\forall i,j$-re
Egy legrövidebb $i \rightsquigarrow j$ út, melyen a közbülső pontok sorszáma legfeljebb k, vagy tartalmazza a k csúcsot vagy nem.
— igen $\Longrightarrow$ $F[i,j] := F[i,k] + F[k,j]$



A G gráf a C adjacencia-mátrixával adott.
Egy szintén $n \times n$-es F mátrixot fogunk használni a számításhoz.
Kezdetben $F[i,j] := C[i,j]$.
$\Longrightarrow$ ciklus $\Longrightarrow$ k-adik lefutása után $F[i,j]$ azon $i \rightsquigarrow j$ utak legrövidebbjeinek a hosszát tartalmazza, amelyek közbülső pontjai k-nál nem nagyobb sorszámúak

Az új $F_k[i,j]$ értékeket kiszámíthatjuk ha ismerjük $F_{k-1}[i,j]$-t $\forall i,j$-re
Egy legrövidebb $i \rightsquigarrow j$ út, melyen a közbülső pontok sorszáma legfeljebb k, vagy tartalmazza a k csúcsot vagy nem.
— igen $\Longrightarrow F[i,j] := F[i,k] + F[k,j]$



— nem $\Longrightarrow F_k[i,j] = F_{k-1}[i,j]$

FLOYD algoritmusa

```
(1) for i := 1 to n do
        for j := 1 to n do
            F[i,j] := C[i,j]
(2) for k := 1 to n do
        for i := 1 to n do
            for j := 1 to n do
                F[i,j] := min{F[i,j], F[i,k] + F[k,j]}
```

FLOYD algoritmusa

(1) for $i := 1$ **to** n **do**
  for $j := 1$ **to** n **do**
    $F[i,j] := C[i,j]$
(2) for $k := 1$ **to** n **do**
  for $i := 1$ **to** n **do**
    for $j := 1$ **to** n **do**
      $F[i,j] := \min\{F[i,j], F[i,k] + F[k,j]\}$

Tétel. *$F[i,j]$ a (2)-beli iteráció k-adik menete után azon legrövidebb $i \rightsquigarrow j$ utak hosszát tartalmazza, amelyek belső csúcsai $1, 2, \ldots, k$ közül valók.*

FLOYD algoritmusa

(1) for $i := 1$ **to** n **do**
  for $j := 1$ **to** n **do**
    $F[i,j] := C[i,j]$
(2) for $k := 1$ **to** n **do**
  for $i := 1$ **to** n **do**
    for $j := 1$ **to** n **do**
      $F[i,j] := \min\{F[i,j], F[i,k] + F[k,j]\}$

Tétel. *$F[i,j]$ a (2)-beli iteráció k-adik menete után azon legrövidebb $i \rightsquigarrow j$ utak hosszát tartalmazza, amelyek belső csúcsai $1, 2, \ldots, k$ közül valók.*

$$k = n \implies F[i,j] = d(i,j)$$

FLOYD algoritmusa

(1) for $i := 1$ **to** n **do**
  for $j := 1$ **to** n **do**
    $F[i,j] := C[i,j]$
(2) for $k := 1$ **to** n **do**
  for $i := 1$ **to** n **do**
    for $j := 1$ **to** n **do**
      $F[i,j] := \min\{F[i,j], F[i,k] + F[k,j]\}$

Tétel. *$F[i,j]$ a (2)-beli iteráció k-adik menete után azon legrövidebb $i \rightsquigarrow j$ utak hosszát tartalmazza, amelyek belső csúcsai $1, 2, \ldots, k$ közül valók.*

$k = n \implies F[i,j] = d(i,j)$

Lépésszám: n-szer megyünk végig a táblázaton, minden helyen $O(1)$ lépés $\implies O(n^3)$

Java animáció: Floyd algoritmus

A legrövidebb utak nyomon-követése

Menet közben karbantartunk egy $n \times n$-es P tömböt.

A legrövidebb utak nyomon-követése

Menet közben karbantartunk egy $n \times n$-es P tömböt.
Kezdetben $P[i, j] := 0$.

A legrövidebb utak nyomon-követése

Menet közben karbantartunk egy $n \times n$-es P tömböt.
Kezdetben $P[i, j] := 0$.
Ha egy $F[i, j]$ értéket megváltoztatunk, mert találtunk egy k-n átmenő rövidebb utat, akkor $P[i, j] := k$.

A legrövidebb utak nyomon-követése

Menet közben karbantartunk egy $n \times n$-es P tömböt.
Kezdetben $P[i, j] := 0$.
Ha egy $F[i, j]$ értéket megváltoztatunk, mert találtunk egy k-n átmenő rövidebb utat, akkor $P[i, j] := k$.
$\Longrightarrow$ Végül $P[i, j]$ egy legrövidebb $i \rightsquigarrow j$ út „középső" csúcsát fogja tartalmazni.

A legrövidebb utak nyomon-követése

Menet közben karbantartunk egy $n \times n$-es P tömböt.
Kezdetben $P[i,j] := 0$.
Ha egy $F[i,j]$ értéket megváltoztatunk, mert találtunk egy k-n átmenő rövidebb utat, akkor $P[i,j] := k$.
$\Longrightarrow$ Végül $P[i,j]$ egy legrövidebb $i \rightsquigarrow j$ út „középső" csúcsát fogja tartalmazni.
$i \rightsquigarrow j$ út összeállítása rekurzív $\Longrightarrow$

```
procedure legrövidebb út(i, j:csúcs);
var k:csúcs;
begin
        k := P[i, j];
        if k = 0 then return;
        legrövidebb út(i, k);
        kiír(k);
        legrövidebb út(k, j)
end;
```

Tranzitív lezárás

Bemenet: $G = (V, E)$ irányított gráf.
Csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mely pontok között vezet irányított út.

Tranzitív lezárás

Bemenet: $G = (V, E)$ irányított gráf.
Csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mely pontok között vezet irányított út.

Floyd $\Longrightarrow$ ha a végén $F[i, j] \neq \infty$, akkor van út, különben nincs.

Tranzitív lezárás

Bemenet: $G = (V, E)$ irányított gráf.
Csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mely pontok között vezet irányított út.

Floyd $\Longrightarrow$ ha a végén $F[i, j] \neq \infty$, akkor van út, különben nincs.

Kicsit egyszerűbb korábbi algoritmus: S. Warshall

Tranzitív lezárás

Bemenet: $G = (V, E)$ irányított gráf.
Csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mely pontok között vezet irányított út.

Floyd $\Longrightarrow$ ha a végén $F[i, j] \neq \infty$, akkor van út, különben nincs.

Kicsit egyszerűbb korábbi algoritmus: S. Warshall
Definíció. *[tranzitív lezárt] Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf, A az adjacencia-mátrixa. Legyen továbbá T a következő $n \times n$-es mátrix:*

$$T[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{ha } i\text{-ből } j \text{ elérhető irányított úttal;} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor a T mátrixot – illetve az általa meghatározott gráfot – az A mátrix – illetve az általa meghatározott G gráf – tranzitív lezártjának *hívjuk.*

Tranzitív lezárás

Bemenet: $G = (V, E)$ irányított gráf.
Csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mely pontok között vezet irányított út.

Floyd $\Longrightarrow$ ha a végén $F[i, j] \neq \infty$, akkor van út, különben nincs.

Kicsit egyszerűbb korábbi algoritmus: S. Warshall
Definíció. *[tranzitív lezárt] Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf, A az adjacencia-mátrixa. Legyen továbbá T a következő $n \times n$-es mátrix:*

$$T[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{ha } i\text{-ből } j \text{ elérhető irányított úttal;} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor a T mátrixot – illetve az általa meghatározott gráfot – az A mátrix – illetve az általa meghatározott G gráf – tranzitív lezártjának *hívjuk.*

Feladat. *Adott a (Boole-mátrixként értelmezett) A adjacencia-mátrixával a $G = (V, E)$ irányított gráf. Adjuk meg a G tranzitív lezártját.*

Warhall algoritmus

(1) ciklusban a kezdőértékek beállítása helyett

$$T[i,j] := \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \text{ vagy } A[i,j] = 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Warhall algoritmus

(1) ciklusban a kezdőértékek beállítása helyett

$$T[i,j] := \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \text{ vagy } A[i,j] = 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A (2) ciklusban F értékeinek változtatása helyett (ugyanazt megfogalmazva logikai műveletekkel)

$(+)$ $$T[i,j] := T[i,j] \vee (T[i,k] \wedge T[k,j]).$$

Warhall algoritmus

(1) ciklusban a kezdőértékek beállítása helyett

$$T[i,j] := \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \text{ vagy } A[i,j] = 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A (2) ciklusban F értékeinek változtatása helyett (ugyanazt megfogalmazva logikai műveletekkel)

$(+)$ $$T[i,j] := T[i,j] \vee (T[i,k] \wedge T[k,j]).$$

Bizonyítás ugyanúgy.

Warhall algoritmus

(1) ciklusban a kezdőértékek beállítása helyett

$$T[i,j] := \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \text{ vagy } A[i,j] = 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A (2) ciklusban F értékeinek változtatása helyett (ugyanazt megfogalmazva logikai műveletekkel)

$(+)$ $$T[i,j] := T[i,j] \vee (T[i,k] \wedge T[k,j]).$$

Bizonyítás ugyanúgy.

Lépésszám: $O(n^3)$

Alkalmazás Floyd módszerére

A súlyozott élű G irányított gráf v csúcsára legyen

$$e(v) = \max\{d(w, v) : \quad w \in V\}.$$

Alkalmazás Floyd módszerére

A súlyozott élű G irányított gráf v csúcsára legyen

$$e(v) = \max\{d(w, v) : \quad w \in V\}.$$

A v csúcs *centruma* G-nek, ha $e(v)$ minimális az összes $v \in V$ között.

Alkalmazás Floyd módszerére

A súlyozott élű G irányított gráf v csúcsára legyen

$$e(v) = \max\{d(w, v) : \quad w \in V\}.$$

A v csúcs *centruma* G-nek, ha $e(v)$ minimális az összes $v \in V$ között.
Feladat. *Keressük meg a G gráf centrumát.*

Alkalmazás Floyd módszerére

A súlyozott élű G irányított gráf v csúcsára legyen

$$e(v) = \max\{d(w, v) : \quad w \in V\}.$$

A v csúcs *centruma* G-nek, ha $e(v)$ minimális az összes $v \in V$ között.
Feladat. *Keressük meg a G gráf centrumát.*

Algoritmus centrum keresésére:

Alkalmazás Floyd módszerére

A súlyozott élű G irányított gráf v csúcsára legyen

$$e(v) = \max\{d(w, v) : \quad w \in V\}.$$

A v csúcs *centruma* G-nek, ha $e(v)$ minimális az összes $v \in V$ között.
Feladat. *Keressük meg a G gráf centrumát.*

Algoritmus centrum keresésére:

(1) Először Floyd módszerével kiszámítjuk a G-beli pontpárok közötti távolságokat. $\Longrightarrow$ $O(n^3)$ művelet

Alkalmazás Floyd módszerére

A súlyozott élű G irányított gráf v csúcsára legyen

$$e(v) = \max\{d(w,v) : \quad w \in V\}.$$

A v csúcs *centruma* G-nek, ha $e(v)$ minimális az összes $v \in V$ között.
Feladat. *Keressük meg a G gráf centrumát.*

Algoritmus centrum keresésére:

(1) Először Floyd módszerével kiszámítjuk a G-beli pontpárok közötti távolságokat. $\Longrightarrow$ $O(n^3)$ művelet

(2) Az előző lépésben kapott F mátrix minden oszlopában meghatározzuk a maximális értéket ($\Longrightarrow e(v)$). $\Longrightarrow$ n-szer keresünk maximumot n elem közül $\Longrightarrow$ összesen $O(n^2)$.

Alkalmazás Floyd módszerére

A súlyozott élű G irányított gráf v csúcsára legyen

$$e(v) = \max\{d(w, v) : \quad w \in V\}.$$

A v csúcs *centruma* G-nek, ha $e(v)$ minimális az összes $v \in V$ között.
Feladat. *Keressük meg a G gráf centrumát.*

Algoritmus centrum keresésére:

(1) Először Floyd módszerével kiszámítjuk a G-beli pontpárok közötti távolságokat. $\Longrightarrow$ $O(n^3)$ művelet

(2) Az előző lépésben kapott F mátrix minden oszlopában meghatározzuk a maximális értéket ($\Longrightarrow e(v)$). $\Longrightarrow$ n-szer keresünk maximumot n elem közül $\Longrightarrow$ összesen $O(n^2)$.

(3) Végül megkeressük az n darab $e(v)$ érték minimumát. $\Longrightarrow O(n)$.

Mélységi bejárás

Gráf bejárás $\Longrightarrow$ minden pontot felsorolunk, bejárunk

Mélységi bejárás

Gráf bejárás $\Longrightarrow$ minden pontot felsorolunk, bejárunk

Mélységi bejárás (depth-first-search, DFS), Szélességi bejárás (breadth-first-search, BFS)

Mélységi bejárás

Gráf bejárás $\Longrightarrow$ minden pontot felsorolunk, bejárunk

Mélységi bejárás (depth-first-search, DFS), Szélességi bejárás (breadth-first-search, BFS)

Pl. lámpagyújtogató algoritmus

Mélységi bejárás

Gráf bejárás $\Longrightarrow$ minden pontot felsorolunk, bejárunk

Mélységi bejárás (depth-first-search, DFS), Szélességi bejárás (breadth-first-search, BFS)

Pl. lámpagyújtogató algoritmus

Mélységi keresés

Mohó menetelés, addig megyünk előre, amíg tudunk, csak aztán fordulunk vissza.

Mélységi bejárás

Gráf bejárás $\Longrightarrow$ minden pontot felsorolunk, bejárunk

Mélységi bejárás (depth-first-search, DFS), Szélességi bejárás (breadth-first-search, BFS)

Pl. lámpagyújtogató algoritmus

Mélységi keresés

Mohó menetelés, addig megyünk előre, amíg tudunk, csak aztán fordulunk vissza.

Java animáció: Mélységi keresés

Mélységi bejárás

Gráf bejárás $\Longrightarrow$ minden pontot felsorolunk, bejárunk

Mélységi bejárás (depth-first-search, DFS), Szélességi bejárás (breadth-first-search, BFS)

Pl. lámpagyújtogató algoritmus

Mélységi keresés

Mohó menetelés, addig megyünk előre, amíg tudunk, csak aztán fordulunk vissza.

Java animáció: Mélységi keresés

$G = (V, E)$ egy irányított gráf, ahol $V = \{1, \ldots, n\}$.

Mélységi bejárás

Gráf bejárás $\Longrightarrow$ minden pontot felsorolunk, bejárunk

Mélységi bejárás (depth-first-search, DFS), Szélességi bejárás (breadth-first-search, BFS)

Pl. lámpagyújtogató algoritmus

Mélységi keresés

Mohó menetelés, addig megyünk előre, amíg tudunk, csak aztán fordulunk vissza.

Java animáció: Mélységi keresés

$G = (V, E)$ egy irányított gráf, ahol $V = \{1, \ldots, n\}$.
$L[v]$ a v csúcs éllistája $(1 \leq v \leq n)$.

Mélységi bejárás

Gráf bejárás $\Longrightarrow$ minden pontot felsorolunk, bejárunk

Mélységi bejárás (depth-first-search, DFS), Szélességi bejárás (breadth-first-search, BFS)

Pl. lámpagyújtogató algoritmus

Mélységi keresés

Mohó menetelés, addig megyünk előre, amíg tudunk, csak aztán fordulunk vissza.

Java animáció: Mélységi keresés

$G = (V, E)$ egy irányított gráf, ahol $V = \{1, \ldots, n\}$.
$L[v]$ a v csúcs éllistája $(1 \leq v \leq n)$.
bejárva$[1 : n]$ logikai vektor $\Longrightarrow$ jártunk-e már ott

Mélységi keresés algoritmusa

```
procedure bejár (* elvégzi a G irányított gráf mélységi bejárását *)
    begin
        for v := 1 to n do
            bejárva[v] := hamis;
        for v := 1 to n do
            if bejárva[v] = hamis then
              mb(v)
    end
```

Mélységi keresés algoritmusa

```
procedure bejár (* elvégzi a G irányított gráf mélységi bejárását *)
    begin
        for v := 1 to n do
            bejárva[v] := hamis;
        for v := 1 to n do
            if bejárva[v] = hamis then
              mb(v)
    end

procedure mb (v: csúcs)
    var
        w: csúcs;
    begin
(1)     bejárva[v] := igaz; (* meggyújtjuk a lámpát *)
        for minden L[v]-beli w csúcsra do
(2)         if bejárva[w] = hamis then
              mb(w) (* megyünk a következő még sötét lámpához *)
    end
```

Mélységi keresés algoritmusa

```
procedure bejár (* elvégzi a G irányított gráf mélységi bejárását *)
    begin
        for v := 1 to n do
            bejárva[v] := hamis;
        for v := 1 to n do
            if bejárva[v] = hamis then
              mb(v)
    end

procedure mb (v: csúcs)
    var
        w: csúcs;
    begin
(1)     bejárva[v] := igaz; (* meggyújtjuk a lámpát *)
        for minden L[v]-beli w csúcsra do
(2)         if bejárva[w] = hamis then
              mb(w) (* megyünk a következő még sötét lámpához *)
    end
```

Lépésszám: $O(n+e)$Mélységi számok és befejezési számok

Definíció. *[mélységi számozás] A G irányított gráf csúcsainak egy* mélységi számozása *a gráf v csúcsához azt a sorszámot rendeli, mely megadja, hogy az mb eljárás (1) sorában a csúcsok közül hányadikként állítottuk bejárva$[v]$ értékét igaz-ra. A v csúcs mélységi számát mszám$[v]$ jelöli.*

Definíció. *[mélységi számozás] A G irányított gráf csúcsainak egy* mélységi számozása *a gráf v csúcsához azt a sorszámot rendeli, mely megadja, hogy az mb eljárás (1) sorában a csúcsok közül hányadikként állítottuk bejárva$[v]$ értékét igaz-ra. A v csúcs mélységi számát mszám$[v]$ jelöli.*

Definíció. *[befejezési számozás] A G irányított gráf csúcsainak egy* befejezési számozása *a gráf v csúcsához azt a sorszámot rendeli, mely megadja, hogy a csúcsok közül hányadikként ért véget az mb(v) hívás. A v csúcs befejezési számát bszám$[v]$ jelöli.*

Definíció. *[mélységi számozás] A G irányított gráf csúcsainak egy* mélységi számozása *a gráf v csúcsához azt a sorszámot rendeli, mely megadja, hogy az mb eljárás (1) sorában a csúcsok közül hányadikként állítottuk bejárva$[v]$ értékét igaz-ra. A v csúcs mélységi számát mszám$[v]$ jelöli.*

Definíció. *[befejezési számozás] A G irányított gráf csúcsainak egy* befejezési számozása *a gráf v csúcsához azt a sorszámot rendeli, mely megadja, hogy a csúcsok közül hányadikként ért véget az mb(v) hívás. A v csúcs befejezési számát bszám$[v]$ jelöli.*

Előző algoritmus kis módosítással:

```
procedure
    begin  msz := 0;  bsz := 0;
        for v := 1 to n do
            bejárva[v] := hamis;  mszám[v] := 0;  bszám[v] := 0;
        for v := 1 to n do
            if bejárva[v] = hamis then
              mb(v)
    end
```

```
procedure
    begin  msz := 0;  bsz := 0;
        for v := 1 to n do
            bejárva[v] := hamis;  mszám[v] := 0;  bszám[v] := 0;
        for v := 1 to n do
            if bejárva[v] = hamis then
              mb(v)
    end

procedure mb (v: csúcs)
    var
        w: csúcs;
    begin
(1)     bejárva[v] := igaz;  msz := msz + 1;  mszám[v] := msz;
        for minden L[v]-beli w csúcsra do
(2)         if bejárva[w] = hamis then
              mb(w);
          bsz := bsz + 1;  bszám[v] := bsz;
    end
```

```
procedure
    begin  msz := 0;  bsz := 0;
        for v := 1 to n do
            bejárva[v] := hamis;  mszám[v] := 0;  bszám[v] := 0;
        for v := 1 to n do
            if bejárva[v] = hamis then
              mb(v)
    end

procedure mb (v: csúcs)
    var
        w: csúcs;
    begin
(1)     bejárva[v] := igaz;  msz := msz + 1;  mszám[v] := msz;
        for minden L[v]-beli w csúcsra do
(2)         if bejárva[w] = hamis then
              mb(w);
          bsz := bsz + 1;  bszám[v] := bsz;
    end
```

Java animáció: Mélységi és befejezési számok

Mélységi feszítő erdő

Definíció. *[faél] A $G = (V, E)$ irányított gráf $v \to w$ éle* faél *(az adott mélységi bejárásra vonatkozóan), ha megvizsgálásakor a (2) sorban a (bejárva$[w] = hamis$) feltétel teljesül.*

Mélységi feszítő erdő

Definíció. *[faél] A $G = (V, E)$ irányított gráf $v \to w$ éle* faél *(az adott mélységi bejárásra vonatkozóan), ha megvizsgálásakor a (2) sorban a (bejárva$[w] = hamis$) feltétel teljesül.*

Jelölje T azt a gráfot, amelynek csúcshalmaza V , élei pedig a faélek.

Mélységi feszítő erdő

Definíció. *[faél] A $G = (V, E)$ irányított gráf $v \to w$ éle* faél *(az adott mélységi bejárásra vonatkozóan), ha megvizsgálásakor a (2) sorban a (bejárva$[w] = hamis$) feltétel teljesül.*

Jelölje T azt a gráfot, amelynek csúcshalmaza V , élei pedig a faélek.
$\Longrightarrow$ ez erdő

Mélységi feszítő erdő

Definíció. *[faél] A $G = (V, E)$ irányított gráf $v \to w$ éle* faél *(az adott mélységi bejárásra vonatkozóan), ha megvizsgálásakor a (2) sorban a (bejárva$[w] = hamis$) feltétel teljesül.*

Jelölje T azt a gráfot, amelynek csúcshalmaza V , élei pedig a faélek.
$\Longrightarrow$ ez erdő

Definíció. *[mélységi feszítő erdő, feszítőfa] Az előbb meghatározott T gráfot a G gráf egy* mélységi feszítő erdejének *nevezzük. Ha T csak egy komponensből áll, akkor* mélységi feszítőfáról *beszélünk.*

Mélységi feszítő erdő

Definíció. *[faél] A $G = (V, E)$ irányított gráf $v \to w$ éle* faél *(az adott mélységi bejárásra vonatkozóan), ha megvizsgálásakor a (2) sorban a (bejárva$[w] = hamis$) feltétel teljesül.*

Jelölje T azt a gráfot, amelynek csúcshalmaza V , élei pedig a faélek.
$\Longrightarrow$ ez erdő

Definíció. *[mélységi feszítő erdő, feszítőfa] Az előbb meghatározott T gráfot a G gráf egy* mélységi feszítő erdejének *nevezzük. Ha T csak egy komponensből áll, akkor* mélységi feszítőfáról *beszélünk.*

Definíció. *[élek osztályozása] Tekintsük a G irányított gráf egy mélységi bejárását és a kapott T mélységi feszítő erdőt. (Ezen bejárás szerint) G egy $x \to y$ éle*

faél, *ha $x \to y$ éle T-nek;*

Mélységi feszítő erdő

Definíció. *[faél] A $G = (V, E)$ irányított gráf $v \to w$ éle* faél *(az adott mélységi bejárásra vonatkozóan), ha megvizsgálásakor a (2) sorban a (bejárva$[w] = hamis$) feltétel teljesül.*

Jelölje T azt a gráfot, amelynek csúcshalmaza V , élei pedig a faélek.
$\Longrightarrow$ ez erdő

Definíció. *[mélységi feszítő erdő, feszítőfa] Az előbb meghatározott T gráfot a G gráf egy* mélységi feszítő erdejének *nevezzük. Ha T csak egy komponensből áll, akkor* mélységi feszítőfáról *beszélünk.*

Definíció. *[élek osztályozása] Tekintsük a G irányított gráf egy mélységi bejárását és a kapott T mélységi feszítő erdőt. (Ezen bejárás szerint) G egy $x \to y$ éle*

faél, *ha $x \to y$ éle T-nek;*
előreél, *ha $x \to y$ nem faél, y leszármazottja x-nek T-ben, és $x \neq y$;*

Mélységi feszítő erdő

Definíció. *[faél] A $G = (V, E)$ irányított gráf $v \to w$ éle* faél *(az adott mélységi bejárásra vonatkozóan), ha megvizsgálásakor a (2) sorban a (bejárva$[w] = hamis$) feltétel teljesül.*

Jelölje T azt a gráfot, amelynek csúcshalmaza V , élei pedig a faélek.
$\Longrightarrow$ ez erdő

Definíció. *[mélységi feszítő erdő, feszítőfa] Az előbb meghatározott T gráfot a G gráf egy* mélységi feszítő erdejének *nevezzük. Ha T csak egy komponensből áll, akkor* mélységi feszítőfáról *beszélünk.*

Definíció. *[élek osztályozása] Tekintsük a G irányított gráf egy mélységi bejárását és a kapott T mélységi feszítő erdőt. (Ezen bejárás szerint) G egy $x \to y$ éle*

faél,	*ha $x \to y$ éle T-nek;*
előreél,	*ha $x \to y$ nem faél, y leszármazottja x-nek T-ben, és $x \neq y$;*
visszaél,	*ha x leszármazottja y-nak T-ben (a hurokél is ilyen);*

Mélységi feszítő erdő

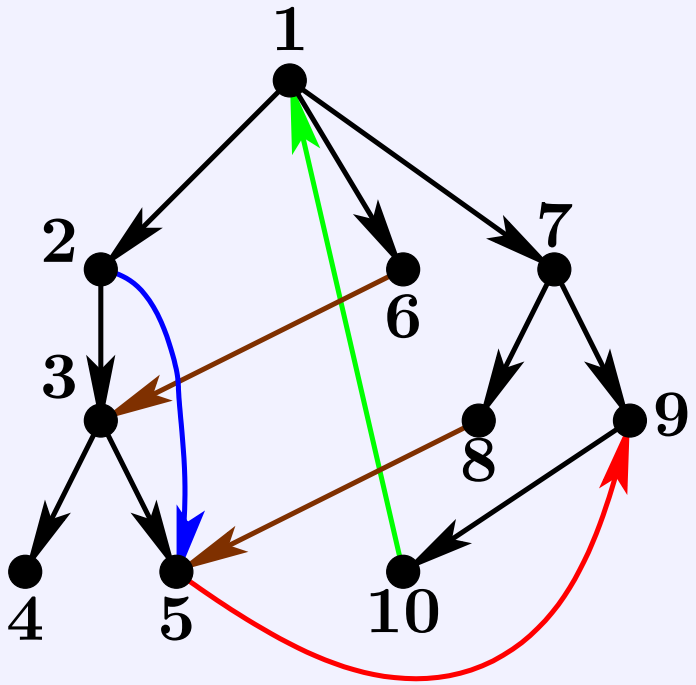
Definíció. *[faél] A $G = (V, E)$ irányított gráf $v \to w$ éle* faél *(az adott mélységi bejárásra vonatkozóan), ha megvizsgálásakor a (2) sorban a (bejárva$[w] = hamis$) feltétel teljesül.*

Jelölje T azt a gráfot, amelynek csúcshalmaza V , élei pedig a faélek.
$\Longrightarrow$ ez erdő

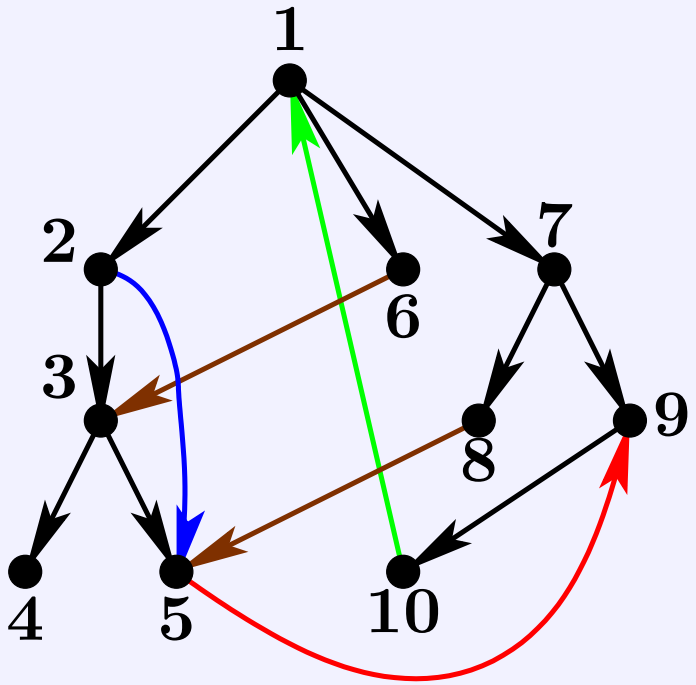
Definíció. *[mélységi feszítő erdő, feszítőfa] Az előbb meghatározott T gráfot a G gráf egy* mélységi feszítő erdejének *nevezzük. Ha T csak egy komponensből áll, akkor* mélységi feszítőfáról *beszélünk.*

Definíció. *[élek osztályozása] Tekintsük a G irányított gráf egy mélységi bejárását és a kapott T mélységi feszítő erdőt. (Ezen bejárás szerint) G egy $x \to y$ éle*

faél,	*ha $x \to y$ éle T-nek;*
előreél,	*ha $x \to y$ nem faél, y leszármazottja x-nek T-ben, és $x \neq y$;*
visszaél,	*ha x leszármazottja y-nak T-ben (a hurokél is ilyen);*
keresztél,	*ha x és y nem leszármazottai egymásnak.*

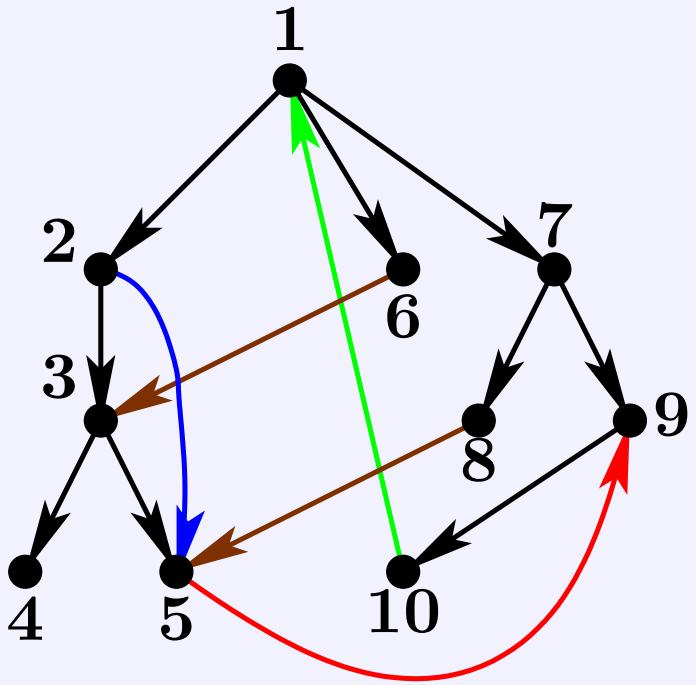


faél
előreél
visszaél
keresztél
ilyen nincs



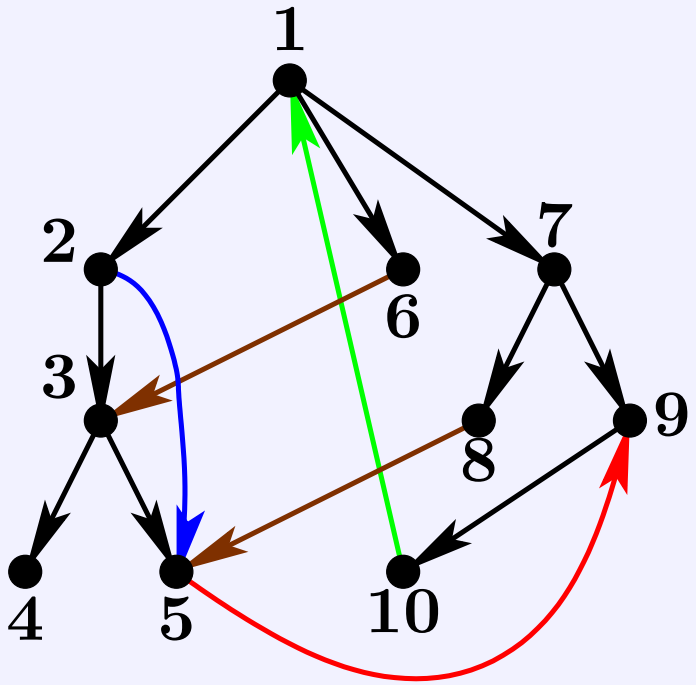
faél
előreél
visszaél
keresztél
ilyen nincs

faél, előre él: kisebb mélységi számúból nagyobb mélységi számúba mutat



faél
előreél
visszaél
keresztél
ilyen nincs

faél, előre él: kisebb mélységi számúból nagyobb mélységi számúba mutat
visszaél, keresztél: nagyobb mélységi számúból kisebb mélységi számúba mutat



faél
előreél
visszaél
keresztél
ilyen nincs

faél, előre él: kisebb mélységi számúból nagyobb mélységi számúba mutat
visszaél, keresztél: nagyobb mélységi számúból kisebb mélységi számúba mutat

visszaél: kisebb befejezési számúból nagyobb befejezési számúba mutat

$x \longrightarrow y$ egy	ha az él vizsgálatakor
- faél	mszám$[y] = \mathbf{0}$
- visszaél	mszám$[y] \leq$ mszám$[x]$ és bszám$[y] = \mathbf{0}$
- előreél	mszám$[y] >$ mszám$[x]$
- keresztél	mszám$[y] <$ mszám$[x]$ és bszám$[y] > \mathbf{0}$.

$x \longrightarrow y$ egy	ha az él vizsgálatakor
- faél	mszám$[y] = 0$
- visszaél	mszám$[y] \leq$ mszám$[x]$ és bszám$[y] = 0$
- előreél	mszám$[y] >$ mszám$[x]$
- keresztél	mszám$[y] <$ mszám$[x]$ és bszám$[y] > 0$.

Tétel. *A G irányított gráf mélységi bejárása – beleértve a mélységi, a befejezési számozást és az élek osztályozását is – $O(n + e)$ lépésben megtehető.*