Algoritmuselmélet 6. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu

2002 Március 4.

Hash-elés álvéletlen próbával

A $0, h_1(K), h_2(K), \ldots, h_{M-1}(K)$ próbasorozat a $0, 1, \ldots, M-1$ számoknak egy a K kulcstól független álvéletlen permutációja.

A sorozatnak gyorsan és hatékonyan reprodukálhatónak kell lennie $\Longleftrightarrow$ véletlen

Ha $h(K) = h(L)$, akkor a K és L kulcsok teljes próbasorozata is megegyezik $\Longrightarrow$ másodlagos csomósodásnak

Kvadratikus maradék próba

Legyen M egy $4k+3$ alakú prímszám, ahol k egy egész.
Ekkor a próbasorozat legyen

$$0, 1^2, -(1^2), 2^2, -(2^2), \ldots, \left(\frac{M-1}{2}\right)^2, -\left(\frac{M-1}{2}\right)^2.$$

$\Longrightarrow$ Belátjuk, hogy ez tényleg permutáció.

Tétel. *Ha M egy 4k + 3 alakú prímszám, akkor nincs olyan n egész, melyre $n^2 \equiv -1 \pmod{M}$.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy n egy egész szám és $n^2 \equiv -1 \pmod{M}$. $\Longrightarrow$

$$-1 \equiv (-1)^{\frac{M-1}{2}} \equiv n^{2\frac{M-1}{2}} \equiv n^{M-1} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Az utolsó lépésnél a kis Fermat-tételt használtuk. ↯

Ha $0 \leq i < j \leq \frac{M-1}{2}$, akkor $i^2 \not\equiv j^2 \pmod{M}$.
$\Longleftarrow j^2 - i^2 = (j-i)(j+i)$ felbontás egyik tényezője sem lehet osztható M-mel, tehát a szorzatuk sem

Ugyanígy $\Longrightarrow -i^2 \not\equiv -j^2 \pmod{M}$.

$i^2 \not\equiv -j^2 \pmod{M} \Longleftarrow (ij^{-1})^2 \not\equiv -1 \pmod{M}$ ✓

Sikeres keresés költsége:

$$C_N \approx 1 - \log(1-\alpha) - \frac{\alpha}{2}$$

Sikertelen keresés költsége:

$$C'_N \approx \frac{1}{(1-\alpha)} - \alpha - \log(1-\alpha)$$

Ezek az összefüggések valamivel általánosabban érvényesek az olyan módszerekre, amelyekre $h_i(K) = f_i(h(K))$; vagyis ahol a $h(K)$ érték már az egész próbasorozatot meghatározza.

Kettős hash-elés

G. de Balbine, J. R. Bell, C. H. Kaman, 1970 körül.

Lényeg: h mellett egy másik h' hash-függvényt is használunk
a $h'(K)$ értékek relatív prímek legyenek az M táblaméretehez
A K kulcs próbasorozata: $h_i(K) := -ih'(K)$.
Ha M és $h'(K)$ relatív prímek
$\Longrightarrow 0, -h'(K), -2h'(K), \ldots, -(M-1)h'(K)$ sorozat elemei mind különbözők modulo M
Fontos sajátossága: különböző K és K' kulcsok próbasorozatai jó eséllyel akkor is különbözők lesznek, ha $h(K) = h(K')$.
A legjobb ismert implementációk időigénye (empirikus adatok alapján)

$$C_N \approx \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{(1-\alpha)} \quad \text{és} \quad C'_N \approx \frac{1}{1-\alpha}.$$

- A kettős hash-elés kiküszöböli mindkét-féle csomósodást
- Sikertelen keresés esetén minden érdekes α-ra gyorsabb, mint a lineáris próbálás
- Sikeres kereséskor csak az $\alpha \geq 0,8$ tartományban lesz gyorsabb a lineáris próbálásnál.

Hash-függvények

- legyen könnyen (gyorsan) számítható
- és minél kevesebb ütközést okozzon.

A második követelmény elég nehezen megfogható, mert a gyakorlatban előforduló kulcshalmazok egyáltalán nem véletlenszerűek.
hasznos tanácsok $\Longrightarrow$ $h(K)$ értéke lehetőleg a K kulcs minden bitjétől függjön és a h értékkészlete a teljes $[0, M-1]$ címtartomány legyen

Osztómódszer

Legyen $h(K) := K \pmod M$,
ahol M a tábla vagy a vödörkatalógus mérete.
Feltesszük, hogy a kulcsok egész számok.
A $h(K)$ számítása gyors és egyszerű.

A tábla mérete sem teljesen közömbös.
Például ha M a 2 egy hatványa, akkor $h(K)$ csak a kulcs utolsó néhány bitjétől függ.
A jó M értékeket illetően van egy széles körben elfogadott recept:
D. E. Knuth javaslata $\Longrightarrow$ M-et prímnek választjuk, úgy, hogy M nem osztja $r^k \pm a$-t, ahol r a karakterkészlet elemszáma (pl. 128, vagy 256) és $a,\ k$ „kicsi" egészek.

M prím $\Longrightarrow$ lényeges feltétel a kvadratikus maradék próbánál.
Könnyű hozzájuk relatív prím számot találni $\Longrightarrow$ kettős hash-elés

Szorzómódszer

β egy rögzített paraméter

$$h(K) := \lfloor M \cdot \{\beta K\} \rfloor.$$

$\{x\}$ jelöli az x valós szám törtrészét

Szemléletesen $\Longrightarrow$ $\{\beta K\}$ kiszámításával a K kulcsot „véletlenszerűen" belőjük a $[0, 1)$ intervallumba $\Longrightarrow$ az eredményt felskálázzuk a címtartományba.

Hatékonyan számítható speciális eset:
$M = 2^t$, $w = 2^{32}$, és legyen A egy a w-hez relatív prím egész.
Ekkor $\beta = \frac{A}{w}$ választás mellett $h(K)$ igen jól számolható.
A számok bináris ábrázolásával dolgozva lényegében egy szorzást és egy eltolást kell elvégezni.

A szorzómódszer jól viselkedik számtani sorozatokon
pl. termék1, termék2, termék3, $\dots$ esetében
Megmutatható, hogy a $h(K), h(K+d), h(K+2d) \dots$ sorozat közelítőleg számtani sorozat lesz, azaz h jól „szétdobja" a kulcsok számtani sorozatait.

Tétel (T. Sós Vera, 1957). *Legyen β irracionális szám, és nézzük a 0, $\{\beta\}$, $\{2\beta\}$, . . ., $\{n\beta\}$ pontok által meghatározott $n+1$ részintervallumot $[0,1)$-ben. Ezek hosszai legfeljebb 3 különböző értéket vehetnek fel, és $\{(n+1)\beta\}$ a leghosszabbak egyikét fogja két részre vágni.*

a $[0,1)$-beli számok közül a legegyenletesebb eloszlást a $\beta = \phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618033988\dots$ és a $\beta = \phi^{-2} = 1-\phi^{-1}$ értékek adják.
$\Longrightarrow$ érdemes a szorzómódszernél az A-t úgy választani, hogy $\frac{A}{w}$ közel legyen ϕ^{-1}-hez. $\Longrightarrow$ *Fibonacci-hash-elés*

A kettős hash-elés második függvénye

Olyan h' függvény kell, melynek értékei a $[0, M-1]$ intervallumba esnek, és relatív prímek az M-hez

Ha M prím $\Longrightarrow$

$$h'(K) := K \pmod{M-1} + 1.$$

$\Longrightarrow$ $h'(K)$ és M relatív prímek
$\Longrightarrow$ elég sok különböző próbasorozatot ad

Java animáció: Hash-elés

Szekvenciális keresés

Ha egy állomány (tömb, lista, stb.) szegényes szerkezetű $\Longrightarrow$ nincs jobb , mint „elejétől a végéig" bejárni, vagy legalábbis addig, amíg a keresett adatot meg nem találjuk.

Ha egyenlő eséllyel kell keresni az elemeket $\Longrightarrow$
Sikeres keresés átlagos költsége:

$$\frac{1+2+\cdots+N}{N} = \frac{N+1}{2}.$$

Sikertelen keresés költsége: N

Ha az állományban az elemek nagyság szerint rendezettek $\Longrightarrow$

Sikeres keresés átlagos költsége: $\frac{N+1}{2}$.
Sikertelen keresés költsége:

$$\frac{1+2+\cdots+N-1+N+N}{N+1} = \frac{N}{2} + \frac{N}{N+1} < \frac{N}{2} + 1.$$

Tegyük fel, hogy csak sikeres keresésekkel van dolgunk, és legyen p_i annak a valószínűsége, hogy az R_i rekordot keressük. $\Longrightarrow$

Sikeres keresés átlagos költsége:

$$C_N = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots + Np_N.$$

Hogy érdemes sorba rendezni az R_i rekordokat? $\Longrightarrow$
csökkenő sorrendben

Különböző eloszlások esetén:

Egyenletes: $p_i = \frac{1}{N} \Longrightarrow C_N = \frac{N+1}{2}$

Egy nagyon ferde eloszlás: $p_i = \frac{1}{2^i} \Longrightarrow C_N = 2 - \frac{1}{2^{N-1}}$

Zipf eloszlás: $p_i = \frac{1}{iH_N}$, ahol

$$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \log n + 0.55721\ldots + o(1)$$

$$\Longrightarrow \qquad C_N = \sum_{i=1}^{N} ip_i = \sum_{i=1}^{N} i\frac{1}{iH_N} = \frac{N}{H_N} \approx \frac{N}{\log N}$$

80-20 szabály: Tapasztalat $\Longrightarrow$ Az adatelérési igények 80%-a a rekordoknak körülbelül csak 20%-át érinti.

$$p_i = \frac{c}{i^{1-\vartheta}}, \text{ ahol}$$

$$\vartheta = \frac{\log 0,8}{\log 0,2} \approx \frac{1}{7}, \quad c = \frac{1}{H_N^{(1-\vartheta)}} \text{ és } H_N^{(1-\vartheta)} = 1 + \frac{1}{2^{(1-\vartheta)}} + \cdots + \frac{1}{N^{(1-\vartheta)}}$$

$$\Longrightarrow C_N \approx 0,122N$$

Önszervező módszerek

Mit tehetünk abban az esetben, ha a p_i keresési valószínűségeket nem ismerjük, vagy esetleg azok idővel változnak?

- A keresett (és megtalált) R_i elemet a tábla elejére visszük. Az eredmény:

R_i	R_1	R_2	$\ldots$		R_N

- A keresett (és megtalált) R_i elemet felcseréljük a megelőzővel.

R_1	$\ldots$	R_i	R_{i-1}	$\ldots$		R_N

Ha az eloszlás időben változik, akkor az első megoldás ajánlatos. Ha a $\{p_i\}$ eloszlás stabil, azaz időben nem változik, akkor a második heurisztika eredményesebb.

Információtömörítés

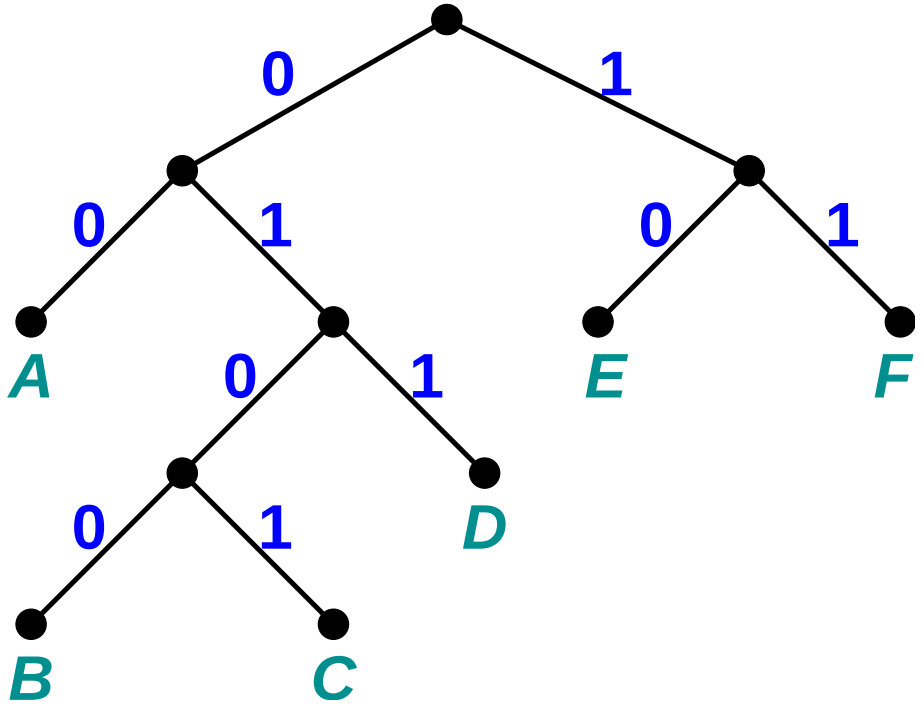
A $b_1, \ldots, b_n$ betűkből álló szöveget szeretnénk bitsorozatként kódolni.

uniform kódolás $\Longrightarrow \lceil \log_2 n \rceil$ a legrövidebb lehetséges kódhosszúság egy betűre

eltérő hosszú kódszavak $\Longrightarrow$ dekódolás problémásabb

Definíció. *Egy bitsorozatokból álló kód prefix kód, ha egy betű kódja sem prefixe (kezdőszelete) egy másik kódjának. Formálisan: ha x és y két különböző betű kódja, akkor nincs olyan z bitsorozat, melyre $xz = y$.*

Egy prefix-tulajdonságú kóddal leírt üzenet egyértelműen visszafejthető.

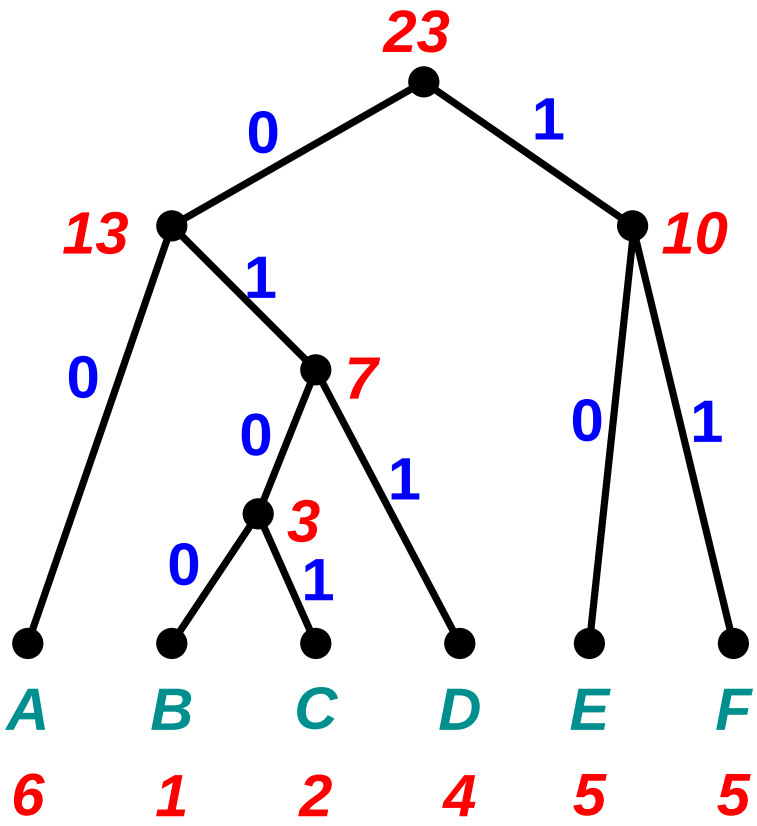


Probléma: Adott egy szöveg, melyben a b_i karakter q_i-szer fordul elő. Keressünk olyan fát, amelyre a $\sum q_i h(b_i)$ összeg minimális, ahol egy x csúcsra $h(x)$ a gyökértől x-ig vezető úton bejárt élek száma.

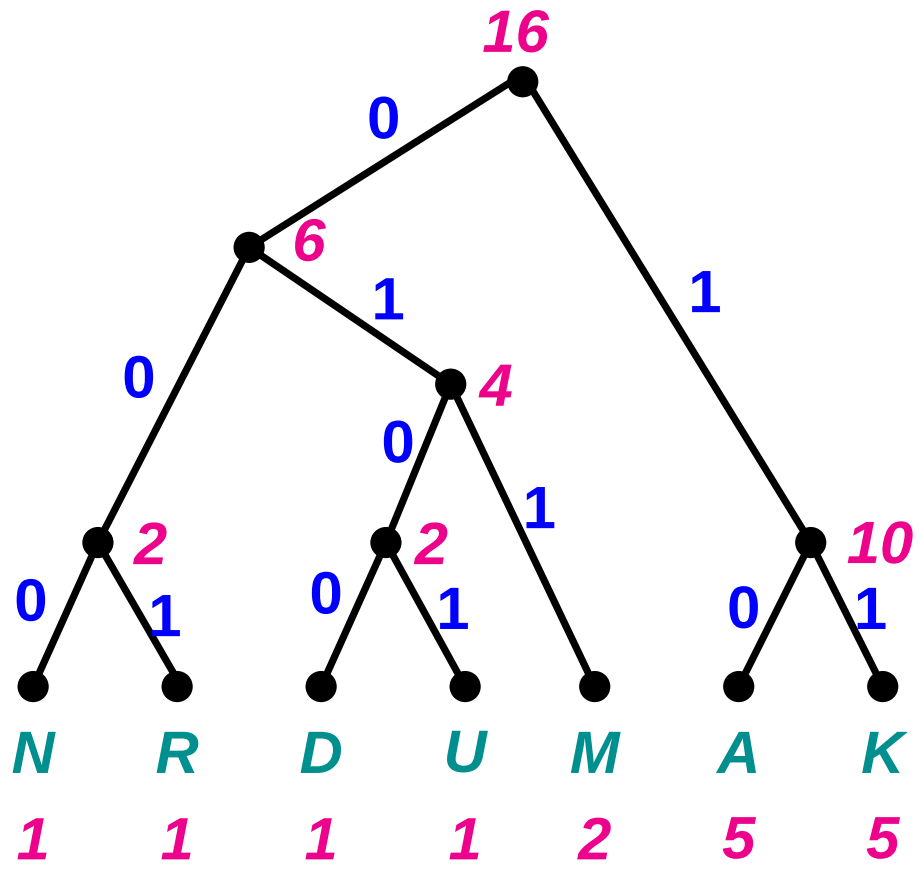
Huffman-kód

Optimális ilyen fa:

- Kezdetben n izolált csúcspontunk van. b_i címkéje legyen q_i.
- Tegyük fel, hogy már megépítettük az $S_1, \ldots, S_k$ fákat, ezek gyökérpontjai $x_1, \ldots, x_k$, utóbbiak címkéi az $r_1, \ldots, r_k$ számok.
  Ekkor vesszük a két minimális címkéjű gyökeret (legyenek ezek x_i és x_j).
- Ezek fölé egy új y gyökérpontot teszünk, melynek fiai x_i és x_j. Az y címkéje $r_i + r_j$.
- A fák száma eggyel csökken. Megállunk, ha már csak egy fa marad.
  Összesen $n - 1$ ilyen összevonó lépés szükséges.


23
0
1
13
10
1
0
7
0
1
0
1
3
0
1
A
B
C
D
E
F
6
1
2
4
5
5

KAKUKKMADARAMNAK $\Longrightarrow$ 7 betű $\Longrightarrow$ uniform kódolással betűnként 3 bit, összesen 48 bit.



A betűk kódjai: K: 11, A: 10, M: 011, U: 0101, D: 0100, N: 000, R: 001

kódszó: 11101101011111011100100100011001100010 11

KAKUKKMADARAMNAK

összesen 40 bit

Optimális kód

Tétel. *A Huffman-fa optimális. Pontosabban fogalmazva, a Huffman-fa esetén az* $I = \sum q_i h(b_i)$ *összeg minimális azon bináris fák között, amelyek levelei* $b_1, \ldots, b_n$.

Bizonyítás: A Huffman-fa által adott I érték legyen $H(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. konstrukció $\Longrightarrow$

$$H(q_1, \ldots, q_n) = H(q_1 + q_2, q_3, \ldots, q_n) + q_1 + q_2$$

Jelölje $Opt(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ a q_i gyakoriságok esetén elérhető optimális I-értéket.

Lemma. *Legyen továbbra is* $q_1 \leq q_2$ *a két legkisebb gyakoriság. Ekkor*

$$Opt(q_1, q_2, \ldots, q_n) = Opt(q_1 + q_2, q_3, \ldots, q_n) + q_1 + q_2.$$

Bizonyítás: Minden belső csúcsnak két fia van.
Legyen most x egy levél az optimális fánkban, melyre $h(x)$ a lehető legnagyobb, x-nek van a fában egy y testvére, címkéik q_1 és q_2.
Töröljük az x és y csúcsokat, és írjuk az új levélbe a $q_1 + q_2$ címkét.
A fa I-értéke legyen J. $\Longrightarrow$
$Opt(q_1, q_2, \ldots, q_n) = J - (h(x) - 1)(q_1 + q_2) + q_1 h(x) + q_2 h(x) = J + q_1 + q_2$,
$\Longrightarrow$ az új fának is optimálisnak kell lennie a $q_1 + q_2, q_3, \ldots, q_n$ gyakoriságokra vonatkozóan, hiszen, ha J-n tudnánk javítani, akkor az eredeti fán is. $\surd$

Bizonyítás: (Tétel) Indukció, $n = 2$ $\surd$
Tegyük fel, hogy legfeljebb $n - 1$ betű esetén igaz $\Longrightarrow$
Az indukciós feltevés szerint

$$Opt(q_1 + q_2, q_3, \ldots, q_n) = H(q_1 + q_2, q_3, \ldots, q_n)$$

$\Longrightarrow$

$$Opt(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) = H(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$$

Java animáció: Huffman-fa