Algoritmuselmélet 4. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu

2002 Február 25.

Bináris keresőfa

Java animáció: Bináris keresőfa

AVL-fák

G. M. Adelszon-Velszkij, E. M. Landisz, 1962 $\Longrightarrow$ kiegyensúlyozott bináris keresőfa

AVL-fák

G. M. Adelszon-Velszkij, E. M. Landisz, 1962 $\Longrightarrow$ kiegyensúlyozott bináris keresőfa

Jelölje $m(f)$ az f bináris fa magasságát (szintjeinek számát), ha x az f fa egy csúcsa; ekkor $m(x)$ jelöli az x-gyökerű részfa magasságát.
Definíció (*AVL***-tulajdonság).** *Egy bináris keresőfa AVL-fa, ha minden x csúcsára teljesül, hogy*

$$|m(bal(x)) - m(jobb(x))| \leq 1.$$

AVL-fák

G. M. Adelszon-Velszkij, E. M. Landisz, 1962 $\Longrightarrow$ kiegyensúlyozott bináris keresőfa

Jelölje $m(f)$ az f bináris fa magasságát (szintjeinek számát), ha x az f fa egy csúcsa; ekkor $m(x)$ jelöli az x-gyökerű részfa magasságát.
Definíció (*AVL***-tulajdonság).** *Egy bináris keresőfa AVL-fa, ha minden x csúcsára teljesül, hogy*

$$|m(bal(x)) - m(jobb(x))| \leq 1.$$

Mekkora a k szintű *AVL*-fa minimális csúcsszáma?

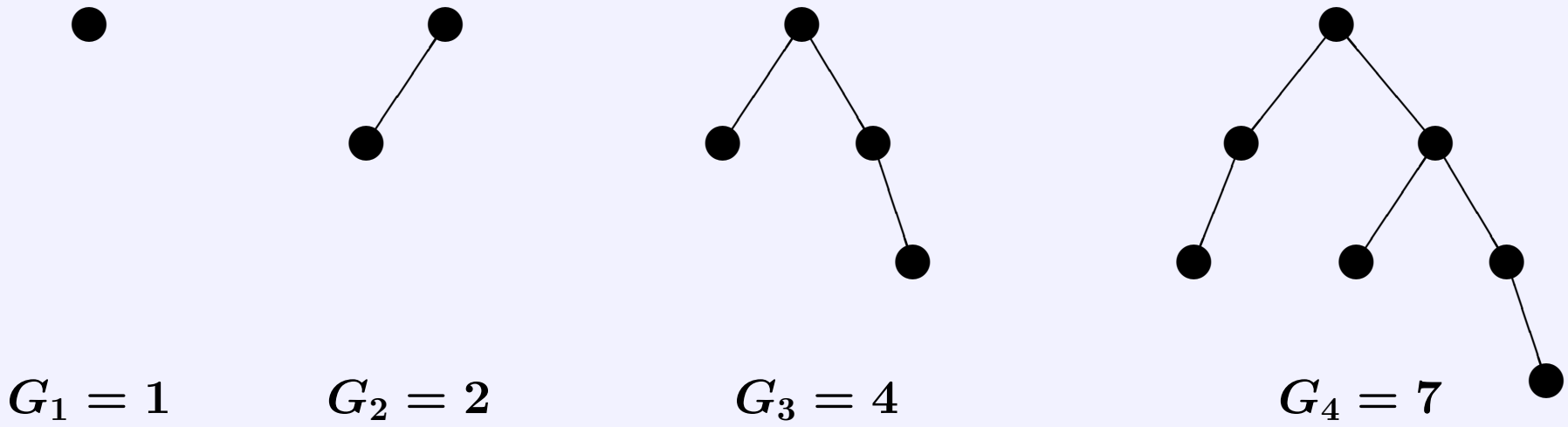
AVL-fák

G. M. Adelszon-Velszkij, E. M. Landisz, 1962 $\Longrightarrow$ kiegyensúlyozott bináris keresőfa

Jelölje $m(f)$ az f bináris fa magasságát (szintjeinek számát), ha x az f fa egy csúcsa; ekkor $m(x)$ jelöli az x-gyökerű részfa magasságát.
Definíció (*AVL*-tulajdonság). *Egy bináris keresőfa AVL-fa, ha minden x csúcsára teljesül, hogy*

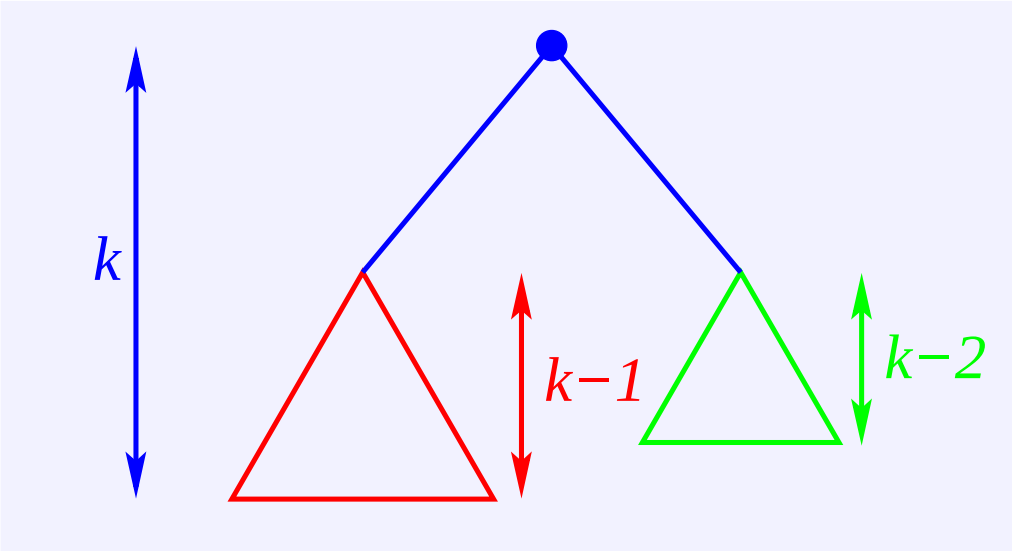
$$|m(bal(x)) - m(jobb(x))| \leq 1.$$

Mekkora a k szintű *AVL*-fa minimális csúcsszáma?

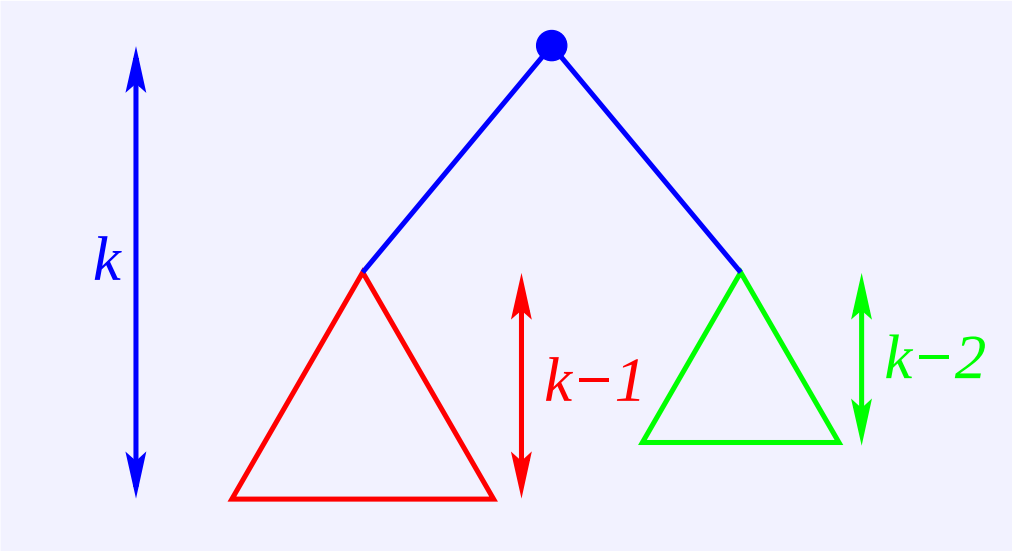


$G_1 = 1$ $G_2 = 2$ $G_3 = 4$ $G_4 = 7$

A k szintszámú minimális csúcsszámú *AVL*-fa gyökerének egyik részfája $k-1$, a másik $k-2$ szintű; az eredeti fa minimalitása miatt pedig mindkét részfa minimális csúcsszámú.



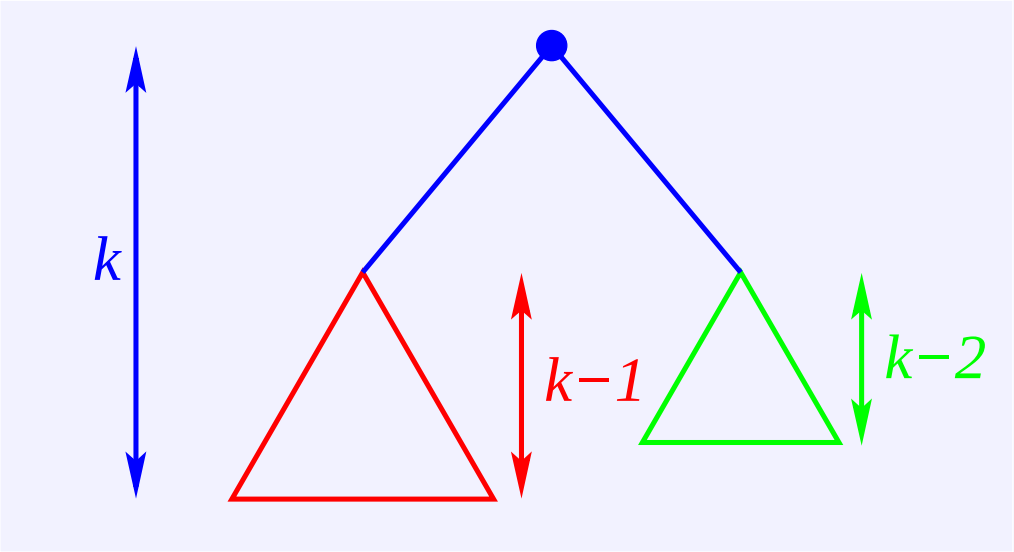
A k szintszámú minimális csúcsszámú *AVL*-fa gyökerének egyik részfája $k-1$, a másik $k-2$ szintű; az eredeti fa minimalitása miatt pedig mindkét részfa minimális csúcsszámú.



$\Longrightarrow$ rekurzió

$$G_k = 1 + G_{k-1} + G_{k-2}.$$

A k szintszámú minimális csúcsszámú *AVL*-fa gyökerének egyik részfája $k-1$, a másik $k-2$ szintű; az eredeti fa minimalitása miatt pedig mindkét részfa minimális csúcsszámú.

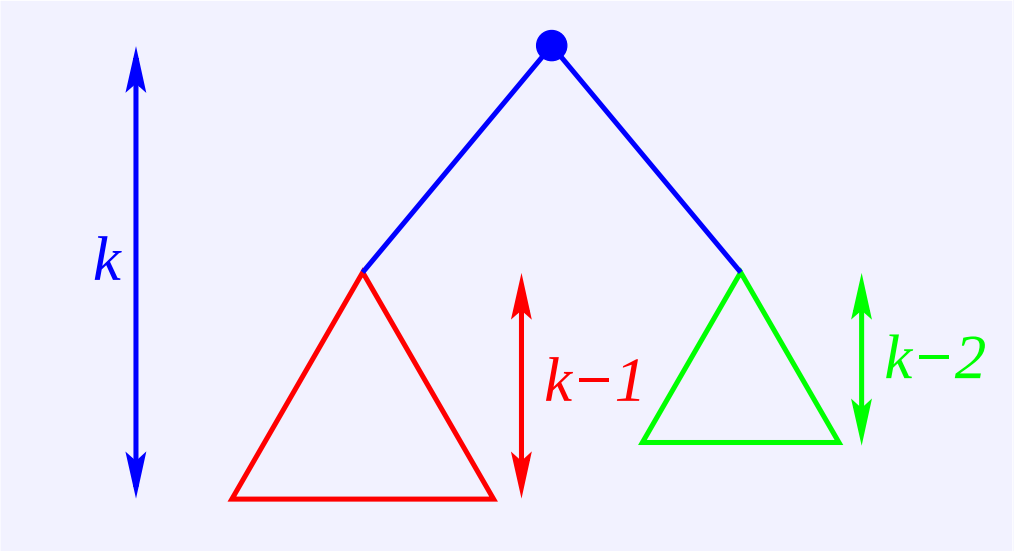


$\Longrightarrow$ rekurzió

$$G_k = 1 + G_{k-1} + G_{k-2}.$$

Tétel. $G_k = F_{k+2} - 1$ *ha* $k \geq 1$.

A k szintszámú minimális csúcsszámú *AVL*-fa gyökerének egyik részfája $k-1$, a másik $k-2$ szintű; az eredeti fa minimalitása miatt pedig mindkét részfa minimális csúcsszámú.



$\Longrightarrow$ rekurzió

$$G_k = 1 + G_{k-1} + G_{k-2}.$$

Tétel. $G_k = F_{k+2} - 1$ *ha* $k \geq 1$.

Bizonyítás: $k = 1,\ 2$ $\surd$ $\Longrightarrow$ indukció:

$$G_k = 1 + G_{k-1} + G_{k-2} = 1 + F_{k+1} - 1 + F_k - 1 = F_{k+2} - 1.$$

Tétel. *Egy n-pontú AVL-fa szintjeinek k száma nem több mint $O(\log n)$, pontosabban $k \leq 1.44 \log_2(n+1)$.*

Tétel. *Egy n-pontú AVL-fa szintjeinek k száma nem több mint $O(\log n)$, pontosabban $k \leq 1.44 \log_2(n+1)$.*

Bizonyítás: tétel $\implies n \geq F_{k+2} - 1$

Tétel. *Egy n-pontú AVL-fa szintjeinek k száma nem több mint $O(\log n)$, pontosabban $k \leq 1.44 \log_2(n+1)$.*

Bizonyítás: tétel $\implies n \geq F_{k+2} - 1$
Fibonacci-számokra vonatkozó alsó becslésből $n + 1 \geq \phi^k$

Tétel. *Egy n-pontú AVL-fa szintjeinek k száma nem több mint $O(\log n)$, pontosabban $k \leq 1.44 \log_2(n+1)$.*

Bizonyítás: tétel $\implies n \geq F_{k+2} - 1$
Fibonacci-számokra vonatkozó alsó becslésből $n + 1 \geq \phi^k$
$\implies \log_\phi(n+1) \geq k \implies k \leq 1.44 \log_2(n+1)$

Az *AVL*-tulajdonság megőrzése

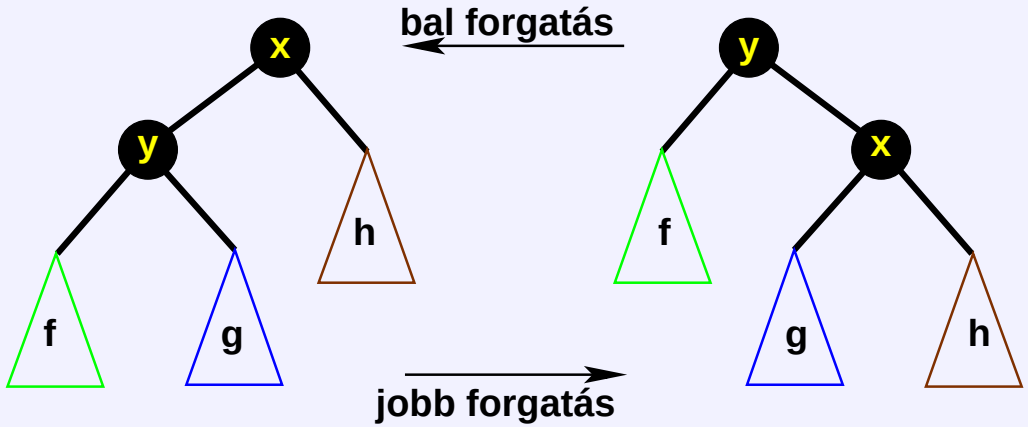
Hogyan lehet a BESZÚR és TÖRÖL eljárásokat úgy megvalósítani, hogy megtartsák az *AVL*-tulajdonságot?

Az *AVL*-tulajdonság megőrzése

Hogyan lehet a BESZÚR és TÖRÖL eljárásokat úgy megvalósítani, hogy megtartsák az *AVL*-tulajdonságot? $\Longrightarrow$ forgatás

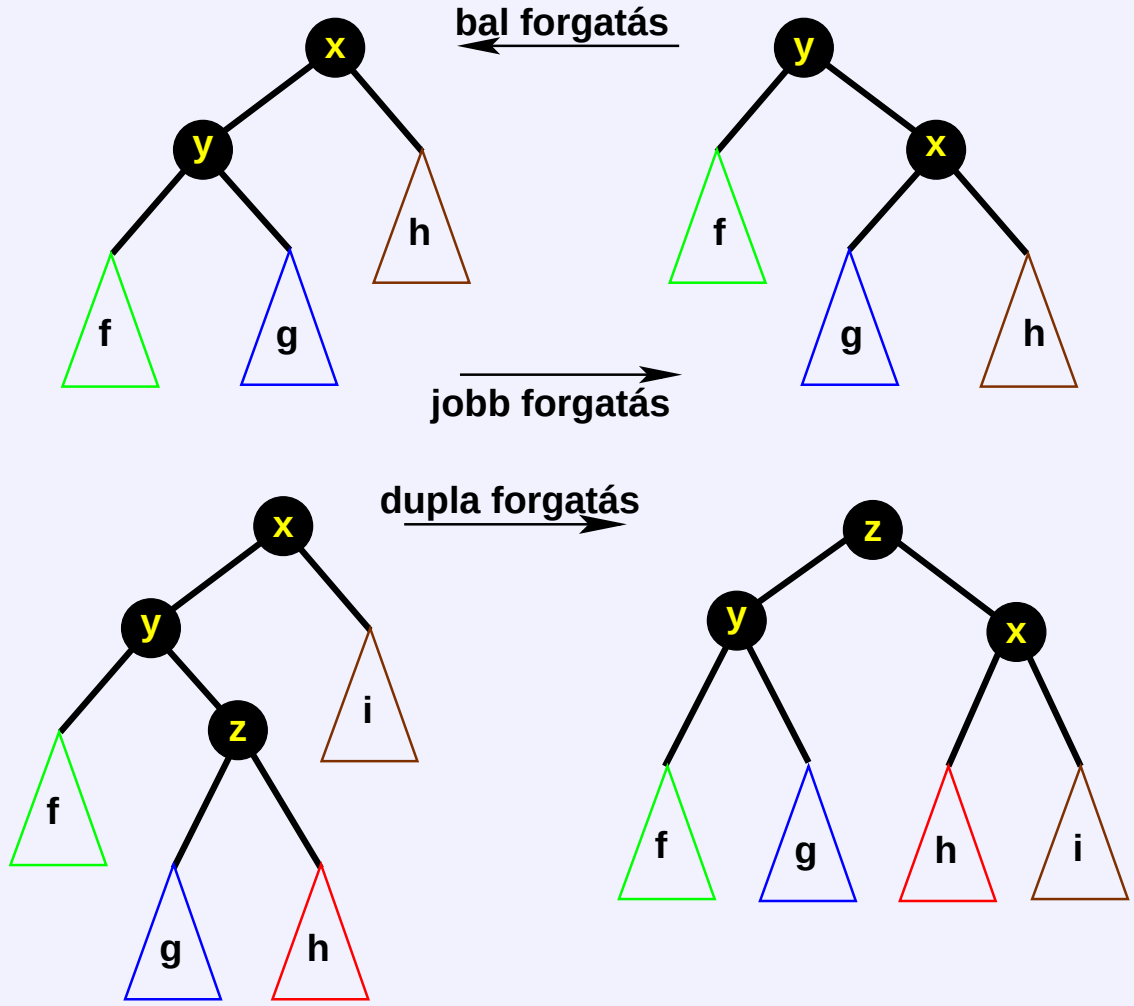
Az *AVL*-tulajdonság megőrzése

Hogyan lehet a BESZÚR és TÖRÖL eljárásokat úgy megvalósítani, hogy megtartsák az *AVL*-tulajdonságot? $\Longrightarrow$ forgatás



Az *AVL*-tulajdonság megőrzése

Hogyan lehet a BESZÚR és TÖRÖL eljárásokat úgy megvalósítani, hogy megtartsák az *AVL*-tulajdonságot? $\Longrightarrow$ forgatás



Tétel. *Legyen S egy n csúcsból álló AVL-fa.* $\text{BESZÚR}(s, S)$ *után legfeljebb egy (esetleg dupla) forgatással helyreállítható az AVL-tulajdonság. A beszúrás költsége ezzel együtt is* $O(\log n)$.

Tétel. *Legyen S egy n csúcsból álló AVL-fa.* $\text{BESZÚR}(s, S)$ *után legfeljebb egy (esetleg dupla) forgatással helyreállítható az AVL-tulajdonság. A beszúrás költsége ezzel együtt is* $O(\log n)$.

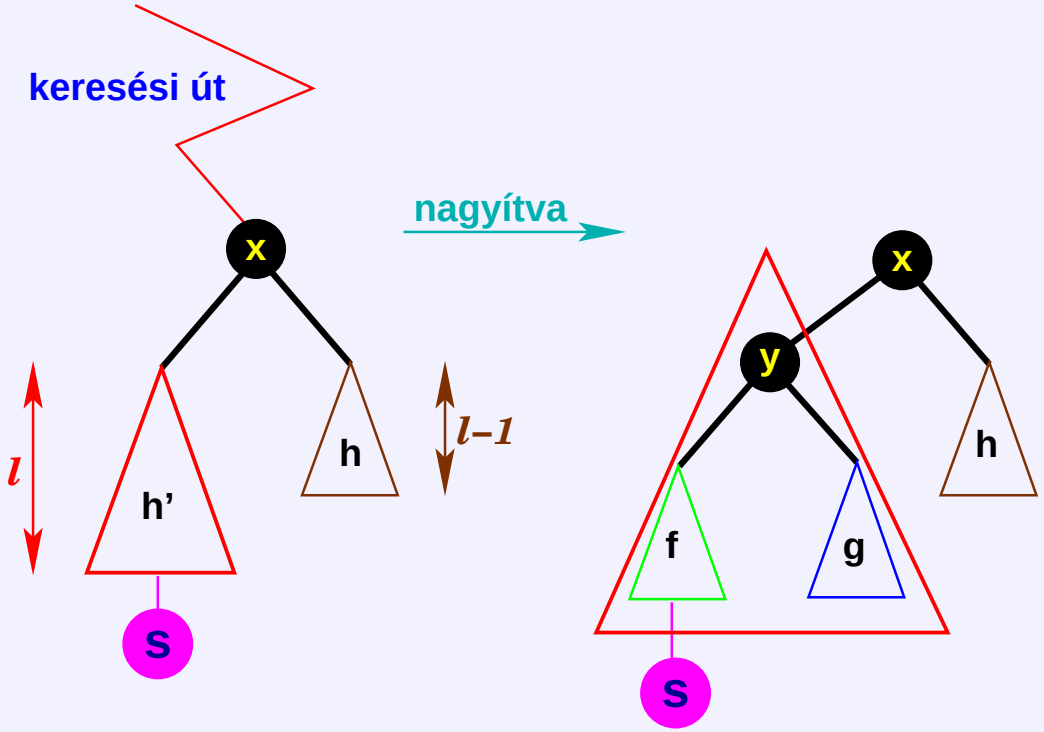
Bizonyítás: Minden csúcsban tartsuk számon $m(f)$-et, az f gyökerű részfa mélységét, ez könnyen karban tartható.

Tétel. *Legyen S egy n csúcsból álló AVL-fa.* $\text{BESZÚR}(s, S)$ *után legfeljebb egy (esetleg dupla) forgatással helyreállítható az AVL-tulajdonság. A beszúrás költsége ezzel együtt is $O(\log n)$.*

Bizonyítás: Minden csúcsban tartsuk számon $m(f)$-et, az f gyökerű részfa mélységét, ez könnyen karban tartható.
KERES(s, S) segítségével megkeressük s helyét.

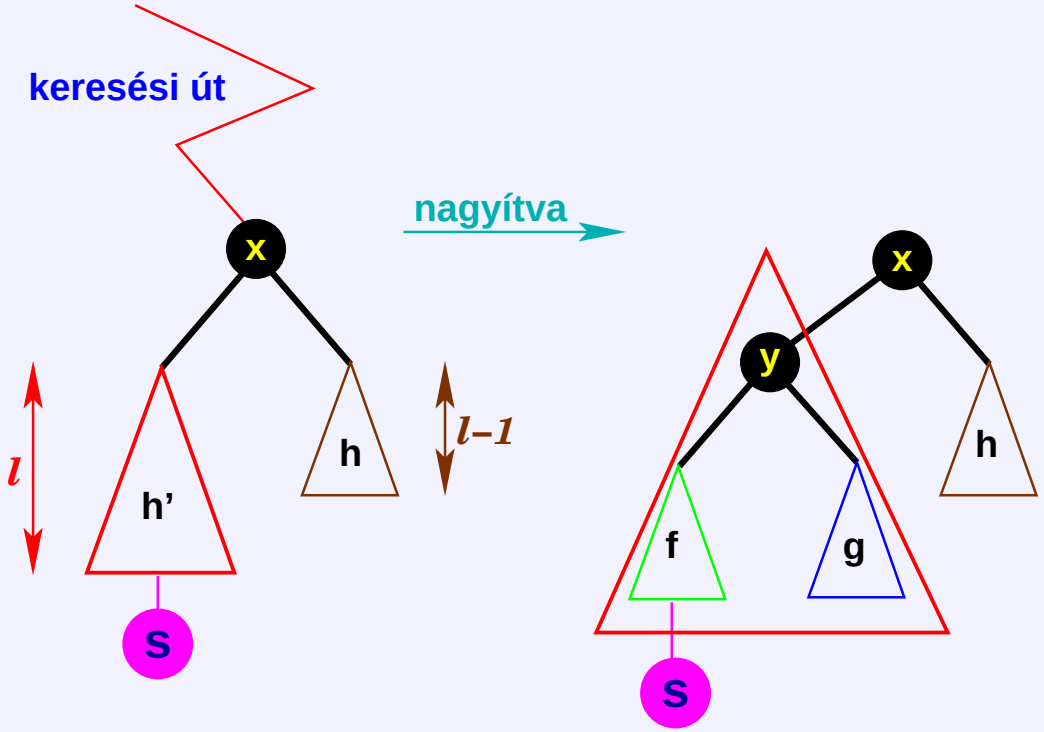
Tétel. *Legyen S egy n csúcsból álló AVL-fa.* $\text{BESZÚR}(s, S)$ *után legfeljebb egy (esetleg dupla) forgatással helyreállítható az AVL-tulajdonság. A beszúrás költsége ezzel együtt is* $O(\log n)$.

Bizonyítás: Minden csúcsban tartsuk számon $m(f)$-et, az f gyökerű részfa mélységét, ez könnyen karban tartható.
KERES(s, S) segítségével megkeressük s helyét.
A keresési utat végigjárva megkeressük a legalsó olyan csúcsot, ahol sérül az *AVL*-tulajdonság $\Longrightarrow x$



Tétel. *Legyen S egy n csúcsból álló AVL-fa.* $\text{BESZÚR}(s, S)$ *után legfeljebb egy (esetleg dupla) forgatással helyreállítható az AVL-tulajdonság. A beszúrás költsége ezzel együtt is* $O(\log n)$.

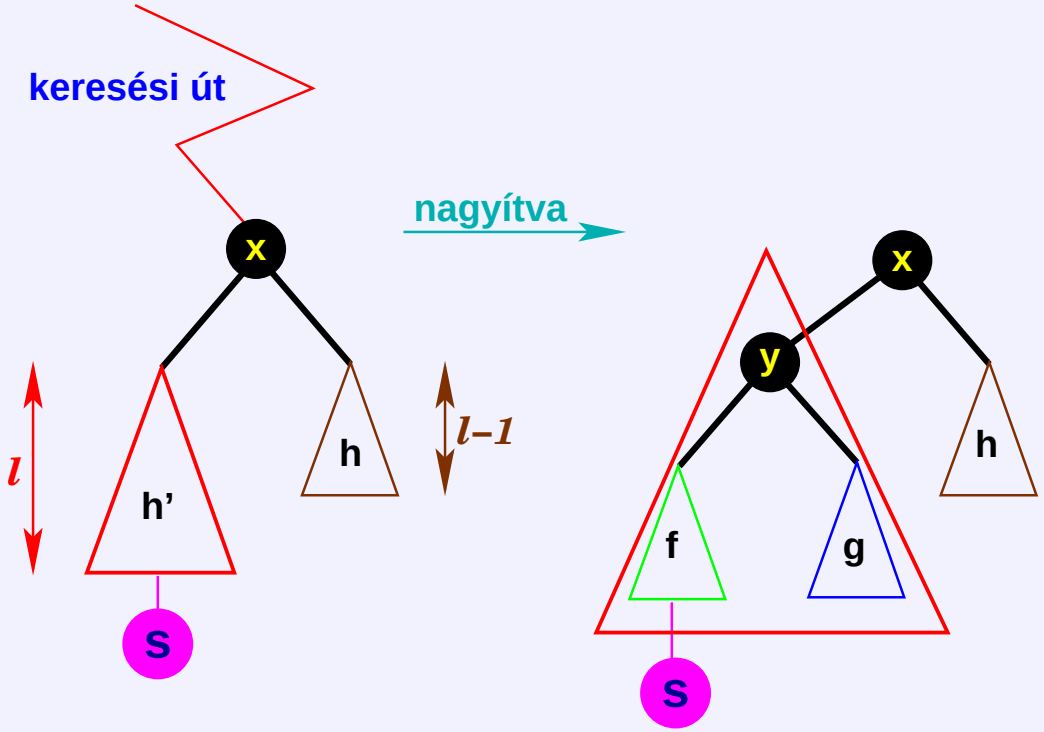
Bizonyítás: Minden csúcsban tartsuk számon $m(f)$-et, az f gyökerű részfa mélységét, ez könnyen karban tartható.
KERES(s, S) segítségével megkeressük s helyét.
A keresési utat végigjárva megkeressük a legalsó olyan csúcsot, ahol sérül az *AVL*-tulajdonság $\Longrightarrow x$



x definíciója $\Longrightarrow m(h') \neq m(h)$

Tétel. *Legyen S egy n csúcsból álló AVL-fa.* $\text{BESZÚR}(s, S)$ *után legfeljebb egy (esetleg dupla) forgatással helyreállítható az AVL-tulajdonság. A beszúrás költsége ezzel együtt is* $O(\log n)$.

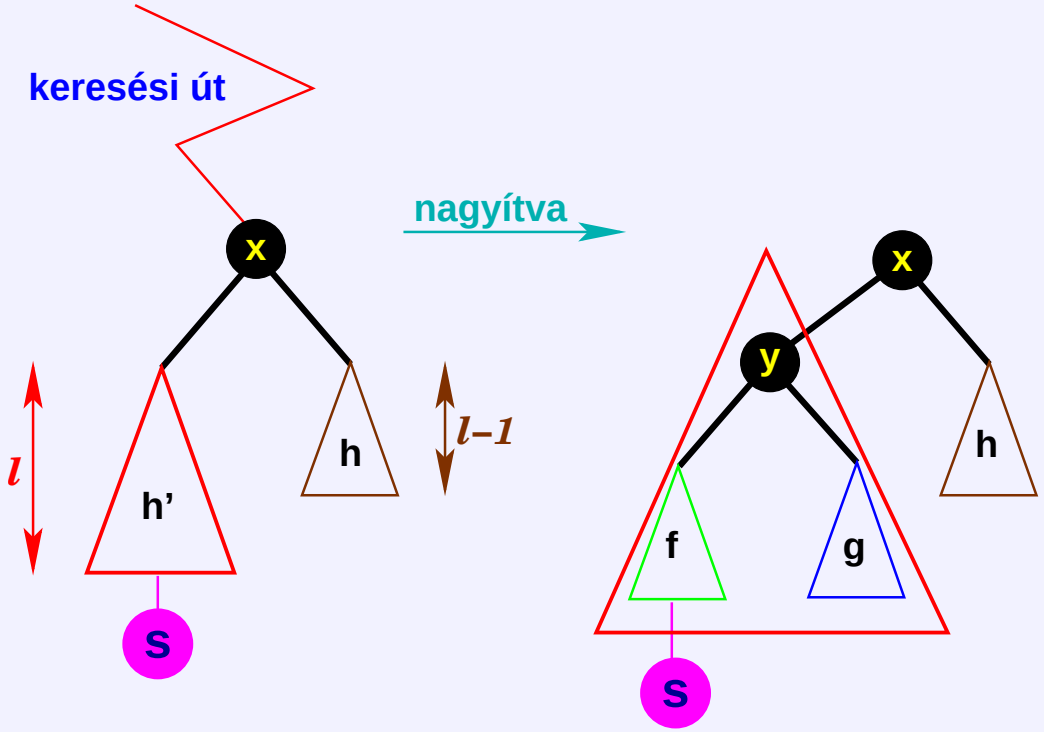
Bizonyítás: Minden csúcsban tartsuk számon $m(f)$-et, az f gyökerű részfa mélységét, ez könnyen karban tartható.
KERES(s, S) segítségével megkeressük s helyét.
A keresési utat végigjárva megkeressük a legalsó olyan csúcsot, ahol sérül az *AVL*-tulajdonság $\Longrightarrow x$



x definíciója $\Longrightarrow m(h') \neq m(h)$
feltehetjük, hogy $m(h') = l, m(h) = l - 1$

Tétel. *Legyen S egy n csúcsból álló AVL-fa.* $\text{BESZÚR}(s, S)$ *után legfeljebb egy (esetleg dupla) forgatással helyreállítható az AVL-tulajdonság. A beszúrás költsége ezzel együtt is* $O(\log n)$.

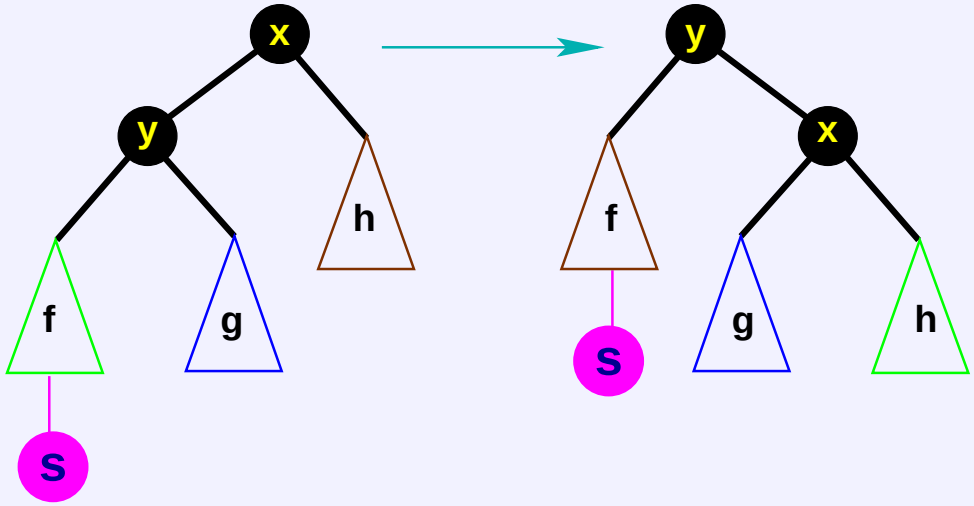
Bizonyítás: Minden csúcsban tartsuk számon $m(f)$-et, az f gyökerű részfa mélységét, ez könnyen karban tartható.
KERES(s, S) segítségével megkeressük s helyét.
A keresési utat végigjárva megkeressük a legalsó olyan csúcsot, ahol sérül az *AVL*-tulajdonság $\Longrightarrow x$

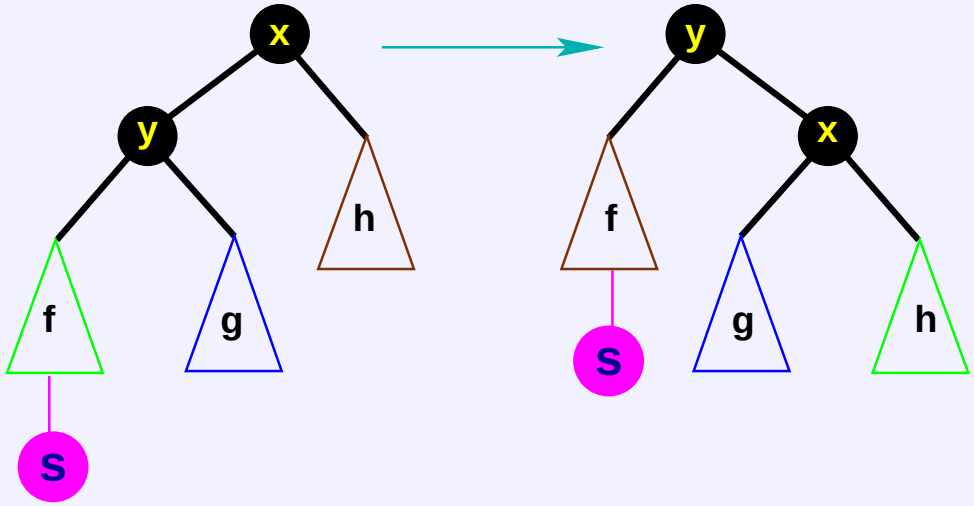


x definíciója $\Longrightarrow m(h') \neq m(h)$
feltehetjük, hogy $m(h') = l, m(h) = l - 1$
Két eset van:

a) s az f részfába kerül

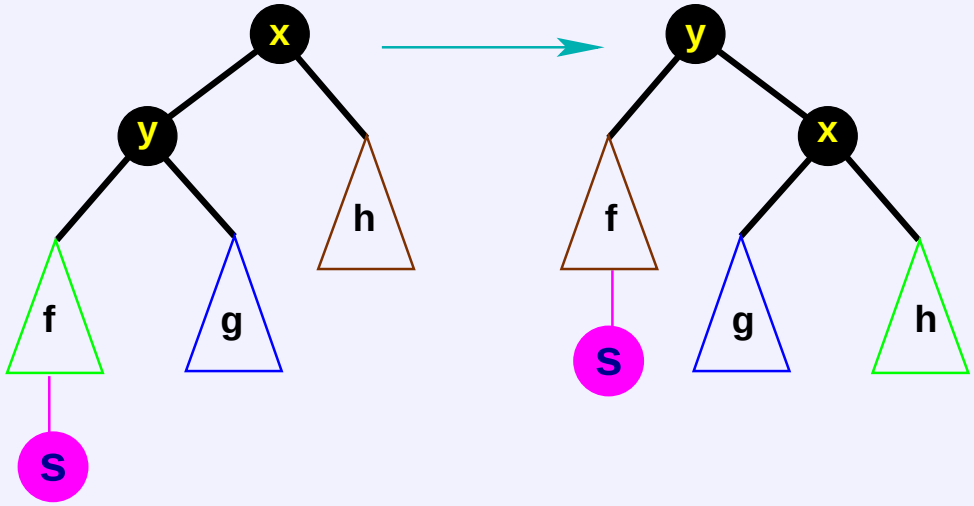
b) s a g részfába kerül


x
y
h
f
g
S
y
x
f
g
h
S



a) eset:

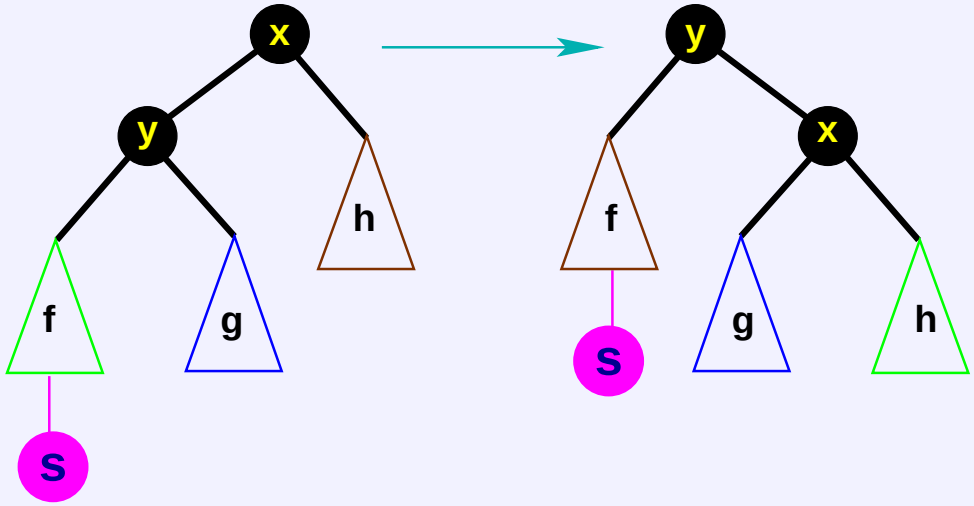
$m(f) < m(g) \implies x$-ben nem sérül az *AVL*-tul.



a) eset:

$m(f) < m(g) \implies x$-ben nem sérül az *AVL*-tul.

$m(f) > m(g) \implies y$-ben is sérül az *AVL*-tul.



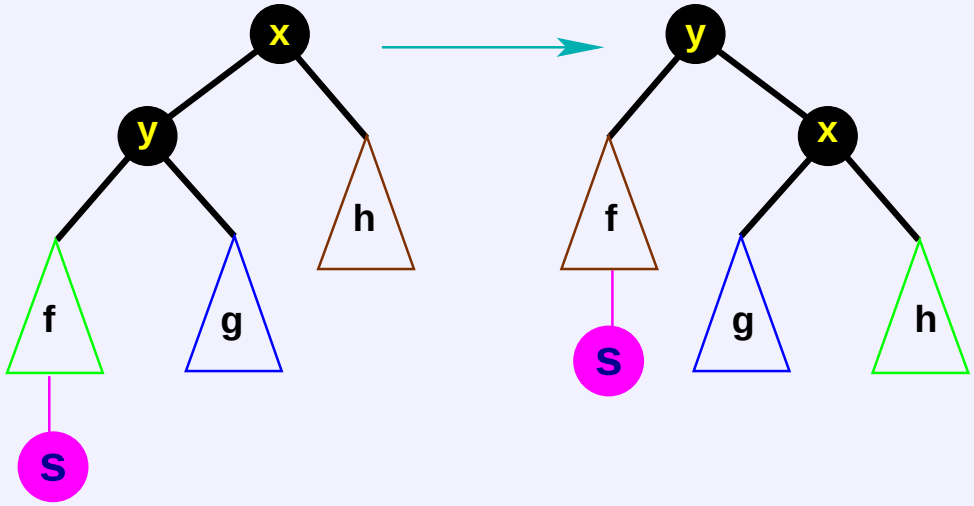
a) eset:

$m(f) < m(g) \implies x$-ben nem sérül az *AVL*-tul.

$m(f) > m(g) \implies y$-ben is sérül az *AVL*-tul.

$\implies$

$m(f) = m(g) = m(h) =$
$= m(y) - 1 = l - 1$



a) eset:

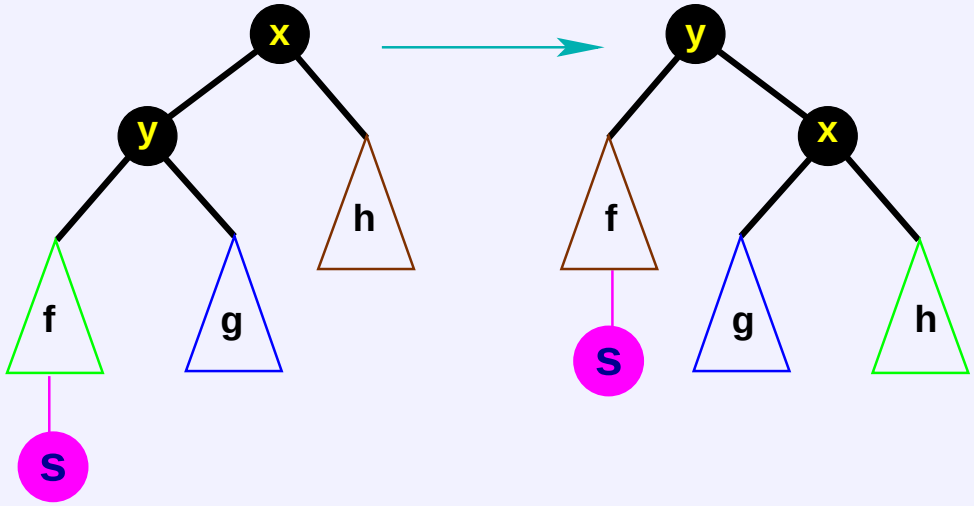
$m(f) < m(g) \implies x$-ben nem sérül az *AVL*-tul.

$m(f) > m(g) \implies y$-ben is sérül az *AVL*-tul.

$\implies$

$m(f) = m(g) = m(h) = m(y) - 1 = l - 1$

$\implies$ jobb forgatás helyre állítja az *AVL*-tul.



a) eset:

$m(f) < m(g) \implies x$-ben nem sérül az *AVL*-tul.

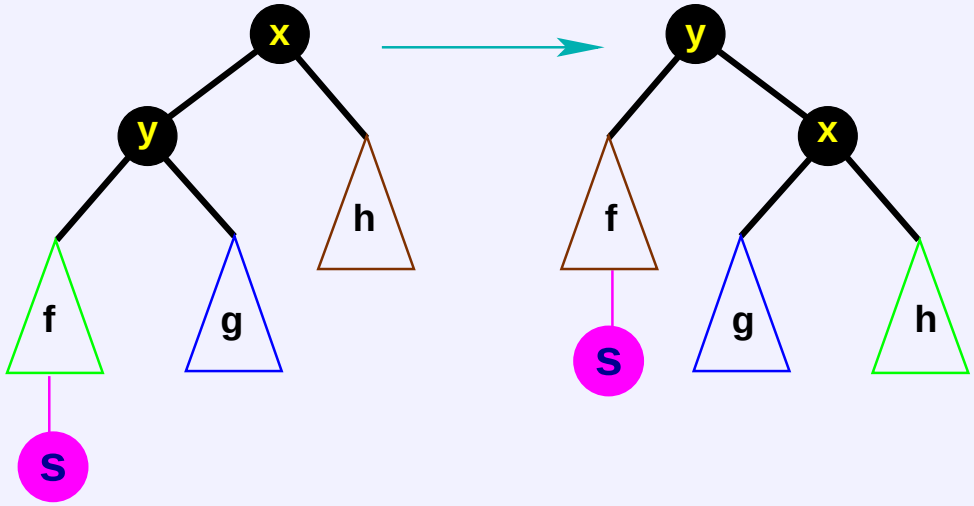
$m(f) > m(g) \implies y$-ben is sérül az *AVL*-tul.

$\implies$

$m(f) = m(g) = m(h) = m(y) - 1 = l - 1$

$\implies$ jobb forgatás helyre állítja az *AVL*-tul.

A forgatás után y mindkét részfájának a magassága l lesz, x új részfái g és h, mindkettő szintszáma $l - 1$.



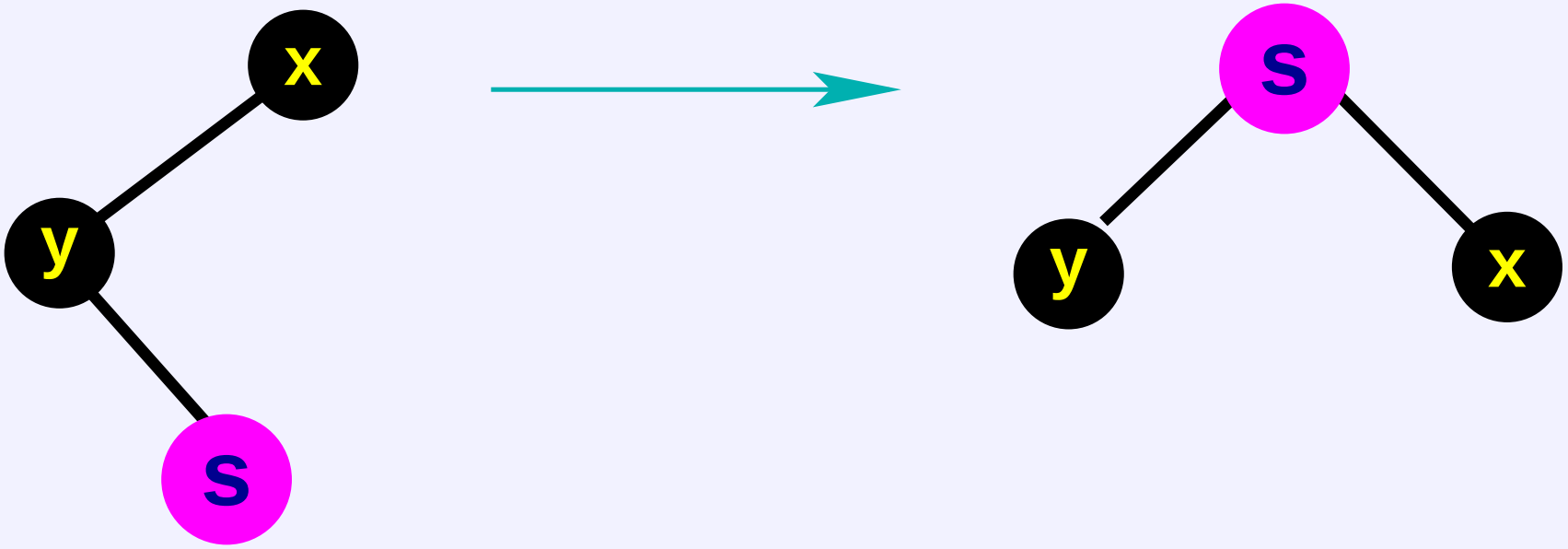
a) eset:
$m(f) < m(g) \implies x$-ben nem sérül az *AVL*-tul.
$m(f) > m(g) \implies y$-ben is sérül az *AVL*-tul.
$\implies$
$m(f) = m(g) = m(h) = m(y) - 1 = l - 1$
$\implies$ jobb forgatás helyre állítja az *AVL*-tul.

A forgatás után y mindkét részfájának a magassága l lesz, x új részfái g és h, mindkettő szintszáma $l - 1$.

y feletti csúcsok magassága nem változik, így az *AVL*-feltétel feljebb is megmarad a kereső út mentén.

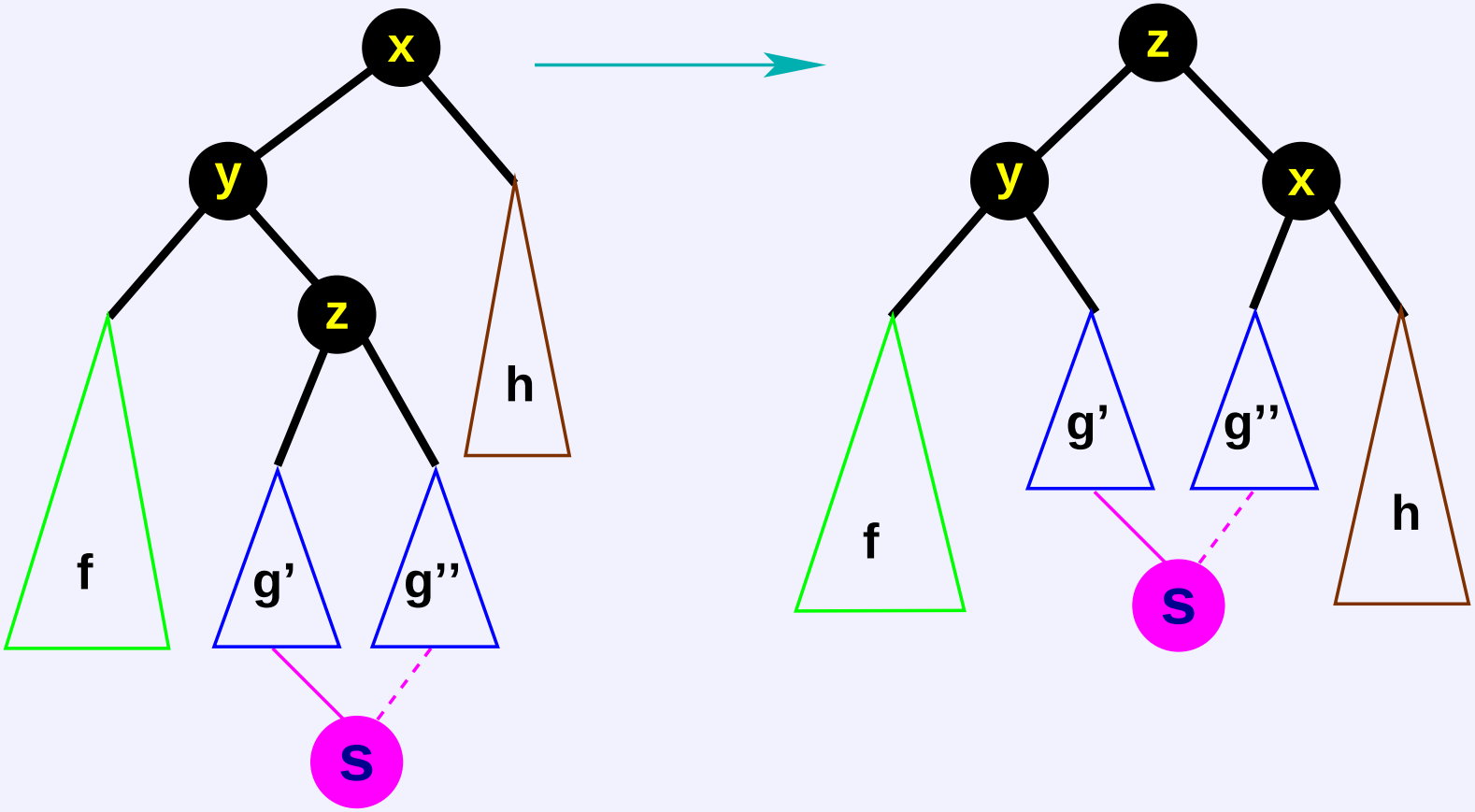
b1) eset: s a g részfába került és s az y csúcs fia ($l = 1$)

b1) eset: s a g részfába került és s az y csúcs fia ($l = 1$)
$\Longrightarrow$ dupla forgatás

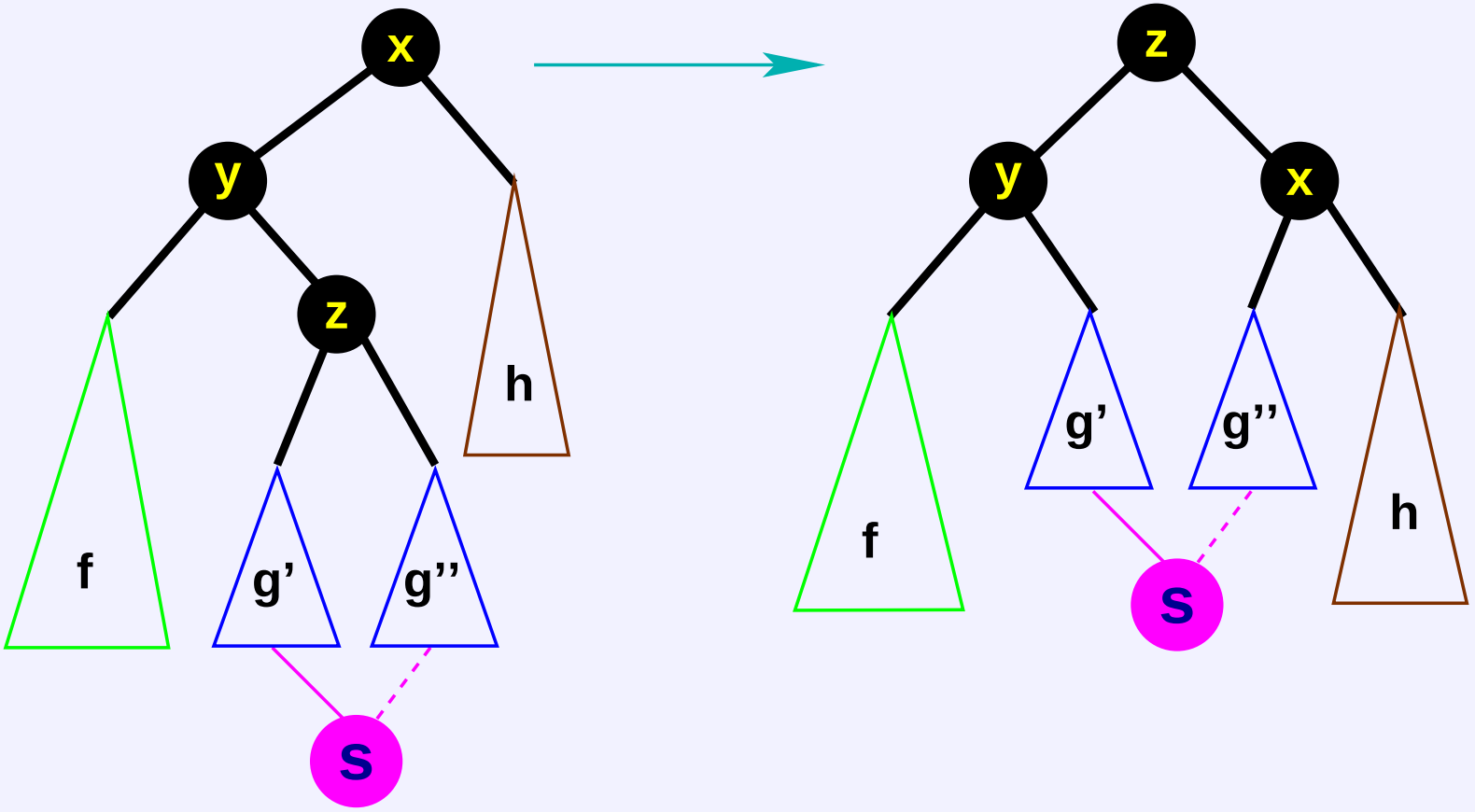


b2) eset: s a g részfába került és s nem az y csúcs fia ($l > 1$)

b2) eset: s a g részfába került és s nem az y csúcs fia ($l > 1$)

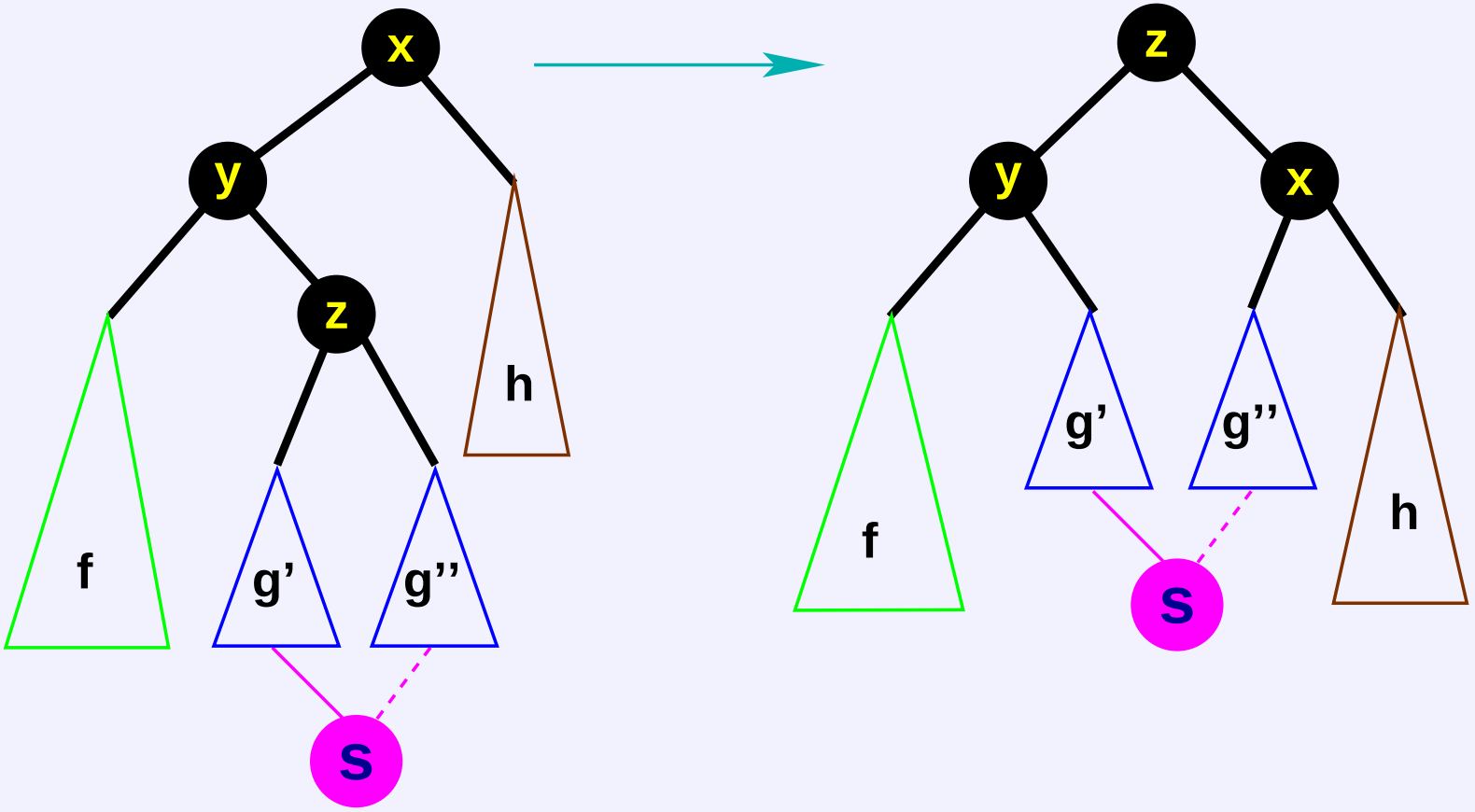


b2) eset: s a g részfába került és s nem az y csúcs fia ($l > 1$)



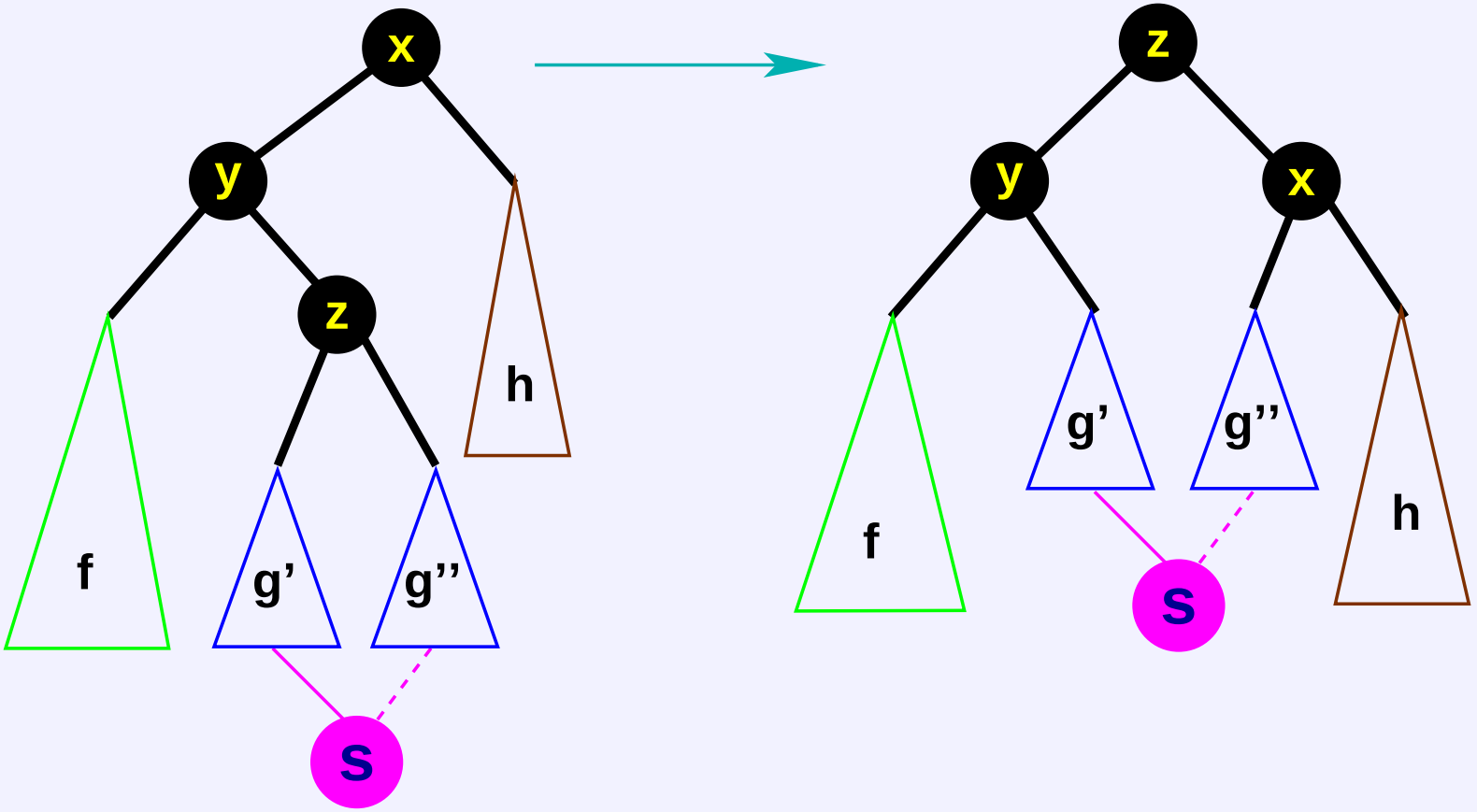
$\Longrightarrow m(f) = l - 1$ (mert y-ban az *AVL*-tul. teljesül), és
$m(g') = m(g'') = l - 2$ (mert z-ben sincs baj az *AVL*-tulajdonsággal)

b2) eset: s a g részfába került és s nem az y csúcs fia ($l > 1$)



$\Longrightarrow m(f) = l - 1$ (mert y-ban az *AVL*-tul. teljesül), és
$m(g') = m(g'') = l - 2$ (mert z-ben sincs baj az *AVL*-tulajdonsággal)
$\Longrightarrow$ dupla forgatás elég

b2) eset: s a g részfába került és s nem az y csúcs fia ($l > 1$)



$\Longrightarrow m(f) = l - 1$ (mert y-ban az *AVL*-tul. teljesül), és
$m(g') = m(g'') = l - 2$ (mert z-ben sincs baj az *AVL*-tulajdonsággal)
$\Longrightarrow$ dupla forgatás elég

Költség: $1.44 \log_2(n+1) = O(\log n)$

Törlés *AVL*-fából

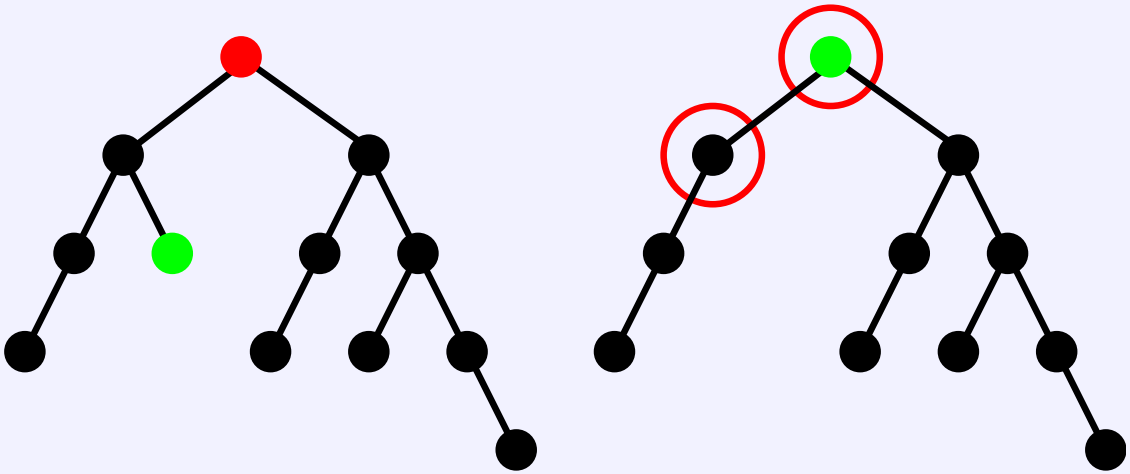
Tétel. *Az n pontú AVL-fából való naiv törlés után legfeljebb $1.44 \log_2 n$ (szimpla vagy dupla) forgatás helyreállítja az AVL-tulajdonságot.*

Nem bizonyítjuk, a módszer hasonló, de nem mindig elég egy forgatás. Pl.:

Törlés *AVL*-fából

Tétel. *Az n pontú AVL-fából való naiv törlés után legfeljebb $1.44 \log_2 n$ (szimpla vagy dupla) forgatás helyreállítja az AVL-tulajdonságot.*

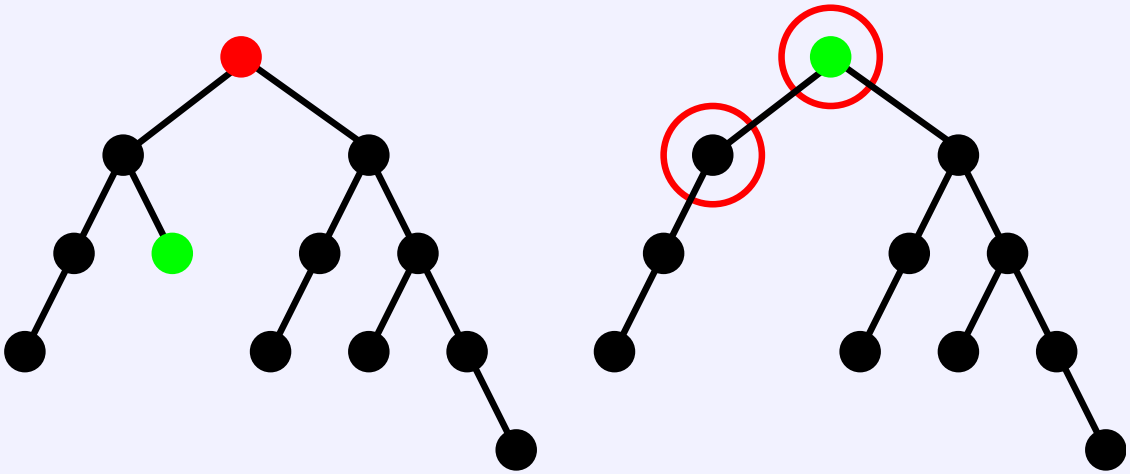
Nem bizonyítjuk, a módszer hasonló, de nem mindig elég egy forgatás. Pl.:



Törlés *AVL*-fából

Tétel. *Az n pontú AVL-fából való naiv törlés után legfeljebb $1.44 \log_2 n$ (szimpla vagy dupla) forgatás helyreállítja az AVL-tulajdonságot.*

Nem bizonyítjuk, a módszer hasonló, de nem mindig elég egy forgatás. Pl.:



Java animáció: *AVL*-fa

További kiegyensúlyozott fák

Az *AVL*-tulajdonság csak egy a lehetséges kiegyensúlyozottsági feltételek közül.

További kiegyensúlyozott fák

Az *AVL*-tulajdonság csak egy a lehetséges kiegyensúlyozottsági feltételek közül. Általánosítása:

Definíció. HB[k]-fák*:* (C. C. Foster, 1973)

Legyen $k \geq 1$ *egy egész szám. Egy bináris keresőfa* $HB[k]$*-fa, ha minden* x *csúcsára teljesül, hogy*

$$|m(bal(x)) - m(jobb(x))| \leq k.$$

További kiegyensúlyozott fák

Az *AVL*-tulajdonság csak egy a lehetséges kiegyensúlyozottsági feltételek közül. Általánosítása:

Definíció. HB[k]-fák*:* (C. C. Foster, 1973)

Legyen $k \geq 1$ *egy egész szám. Egy bináris keresőfa* $HB[k]$*-fa, ha minden* x *csúcsára teljesül, hogy*

$$|m(bal(x)) - m(jobb(x))| \leq k.$$

$\Longrightarrow$ $HB[1]$-fák $\rightarrow$ *AVL*-fák

Súlyra kiegyensúlyozott fák

A részfák súlya legyen a csúcsszámuk: $s(f)$.

Súlyra kiegyensúlyozott fák

A részfák súlya legyen a csúcsszámuk: $s(f)$.

Definíció. *Egy bináris keresőfát súlyra kiegyensúlyozott fának (röviden SK-fának) nevezünk, ha minden x belső csúcsára teljesül, hogy*

$$\sqrt{2}-1 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < \sqrt{2}+1.$$

Súlyra kiegyensúlyozott fák

A részfák súlya legyen a csúcsszámuk: $s(f)$.

Definíció. *Egy bináris keresőfát súlyra kiegyensúlyozott fának (röviden SK-fának) nevezünk, ha minden x belső csúcsára teljesül, hogy*

$$\sqrt{2}-1 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < \sqrt{2}+1.$$

Feladat: Igazoljuk, hogy a leheletnyivel szigorúbb $1/2 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < 2$ korlátokat már csak az l szintből álló $2^l - 1$ pontú bináris fák a teljesítik.

Súlyra kiegyensúlyozott fák

A részfák súlya legyen a csúcsszámuk: $s(f)$.

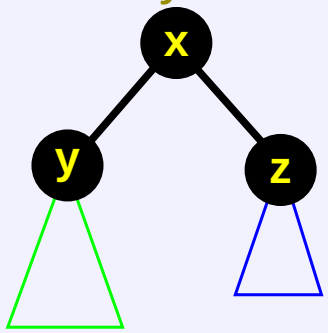
Definíció. *Egy bináris keresőfát súlyra kiegyensúlyozott fának (röviden SK-fának) nevezünk, ha minden x belső csúcsára teljesül, hogy*

$$\sqrt{2}-1 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < \sqrt{2}+1.$$

Feladat: Igazoljuk, hogy a leheletnyivel szigorúbb $1/2 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < 2$ korlátokat már csak az l szintből álló 2^l-1 pontú bináris fák a teljesítik.

Tétel. *Egy n csúcsú SK-fa mélysége $\leq 2\log_2 n + 1$.*

Bizonyítás:



Súlyra kiegyensúlyozott fák

A részfák súlya legyen a csúcsszámuk: $s(f)$.

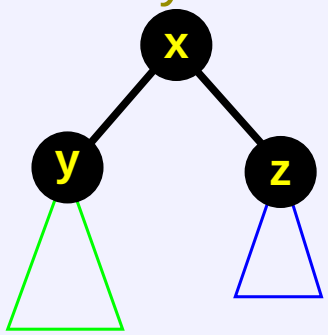
Definíció. *Egy bináris keresőfát súlyra kiegyensúlyozott fának (röviden SK-fának) nevezünk, ha minden x belső csúcsára teljesül, hogy*

$$\sqrt{2}-1 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < \sqrt{2}+1.$$

Feladat: Igazoljuk, hogy a leheletnyivel szigorúbb $1/2 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < 2$ korlátokat már csak az l szintből álló 2^l-1 pontú bináris fák a teljesítik.

Tétel. *Egy n csúcsú SK-fa mélysége $\leq 2\log_2 n + 1$.*

Bizonyítás:



$$s(x) > s(y)+s(z) > s(y)+(\sqrt{2}-1)s(y) = \sqrt{2}s(y)$$

Súlyra kiegyensúlyozott fák

A részfák súlya legyen a csúcsszámuk: $s(f)$.

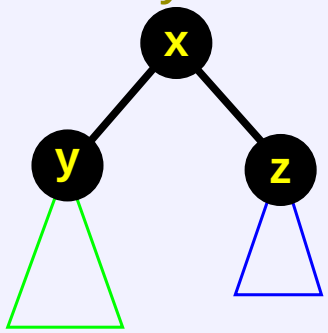
Definíció. *Egy bináris keresőfát súlyra kiegyensúlyozott fának (röviden SK-fának) nevezünk, ha minden x belső csúcsára teljesül, hogy*

$$\sqrt{2}-1 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < \sqrt{2}+1.$$

Feladat: Igazoljuk, hogy a leheletnyivel szigorúbb $1/2 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < 2$ korlátokat már csak az l szintből álló 2^l-1 pontú bináris fák a teljesítik.

Tétel. *Egy n csúcsú SK-fa mélysége $\leq 2\log_2 n + 1$.*

Bizonyítás:



$s(x) > s(y)+s(z) > s(y)+(\sqrt{2}-1)s(y) = \sqrt{2}s(y)$

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_k$ egy k-hosszúságú gyökértől levélig menő út csúcsai.

Súlyra kiegyensúlyozott fák

A részfák súlya legyen a csúcsszámuk: $s(f)$.

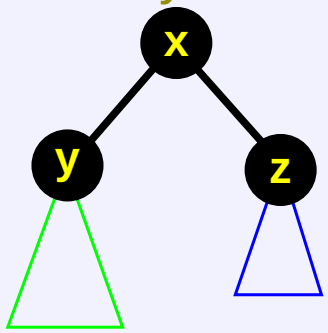
Definíció. *Egy bináris keresőfát súlyra kiegyensúlyozott fának (röviden SK-fának) nevezünk, ha minden x belső csúcsára teljesül, hogy*

$$\sqrt{2}-1 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < \sqrt{2}+1.$$

Feladat: Igazoljuk, hogy a leheletnyivel szigorúbb $1/2 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < 2$ korlátokat már csak az l szintből álló 2^l-1 pontú bináris fák a teljesítik.

Tétel. *Egy n csúcsú SK-fa mélysége $\leq 2\log_2 n + 1$.*

Bizonyítás:



$s(x) > s(y)+s(z) > s(y)+(\sqrt{2}-1)s(y) = \sqrt{2}s(y)$

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_k$ egy k-hosszúságú gyökértől levélig menő út csúcsai.

$n = s(x_1) > \sqrt{2}s(x_2) > (\sqrt{2})^2 s(x_3) > \cdots > (\sqrt{2})^{k-1}s(x_k) = (\sqrt{2})^{k-1} = 2^{(k-1)/2}.$

Súlyra kiegyensúlyozott fák

A részfák súlya legyen a csúcsszámuk: $s(f)$.

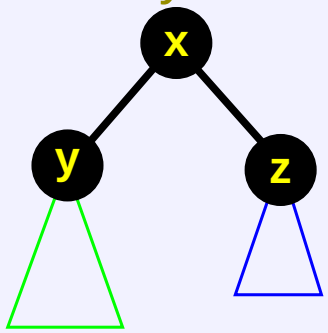
Definíció. *Egy bináris keresőfát súlyra kiegyensúlyozott fának (röviden SK-fának) nevezünk, ha minden x belső csúcsára teljesül, hogy*

$$\sqrt{2}-1 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < \sqrt{2}+1.$$

Feladat: Igazoljuk, hogy a leheletnyivel szigorúbb $1/2 < \frac{s(bal(x))}{s(jobb(x))} < 2$ korlátokat már csak az l szintből álló 2^l-1 pontú bináris fák a teljesítik.

Tétel. *Egy n csúcsú SK-fa mélysége $\leq 2\log_2 n + 1$.*

Bizonyítás:



$s(x) > s(y)+s(z) > s(y)+(\sqrt{2}-1)s(y) = \sqrt{2}s(y)$

Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_k$ egy k-hosszúságú gyökértől levélig menő út csúcsai.

$n = s(x_1) > \sqrt{2}s(x_2) > (\sqrt{2})^2 s(x_3) > \cdots > (\sqrt{2})^{k-1}s(x_k) = (\sqrt{2})^{k-1} = 2^{(k-1)/2}.$

$\Longrightarrow$ ✓

S-fák

Splay-tree: D. D. Sleator és R. E. Tarjan, 1983.

S-fák

Splay-tree: D. D. Sleator és R. E. Tarjan, 1983.
Olyan bináris fa, ami tanul: pl. gyakran keresett elemet feljebb teszi.

S-fák

Splay-tree: D. D. Sleator és R. E. Tarjan, 1983.
Olyan bináris fa, ami tanul: pl. gyakran keresett elemet feljebb teszi.
$\Longrightarrow$ Hosszú átlagos műveletsor alatt az egy lépésre eső költség optimális lesz.

S-fák

Splay-tree: D. D. Sleator és R. E. Tarjan, 1983.
Olyan bináris fa, ami tanul: pl. gyakran keresett elemet feljebb teszi.
$\Longrightarrow$ Hosszú átlagos műveletsor alatt az egy lépésre eső költség optimális lesz.
Fő öltlet:

> KIFORDÍT(x, f) átszervezi az f S-fát úgy, hogy x lesz az új gyökér, ha $x \in f$; különben f gyökere x valamelyik szomszédja lesz:
>
> vagy $\max\{y \in f;\ y < x\}$ vagy $\min\{y \in f;\ y > x\}$.

S-fák

Splay-tree: D. D. Sleator és R. E. Tarjan, 1983.
Olyan bináris fa, ami tanul: pl. gyakran keresett elemet feljebb teszi.
$\Longrightarrow$ Hosszú átlagos műveletsor alatt az egy lépésre eső költség optimális lesz.
Fő öltlet:

> KIFORDÍT(x, f) átszervezi az f S-fát úgy, hogy x lesz az új gyökér, ha $x \in f$; különben f gyökere x valamelyik szomszédja lesz:
>
> vagy $\max\{y \in f;\ y < x\}$ vagy $\min\{y \in f;\ y > x\}$.

KIFORDÍT(x, f) implementációja: KERES(x, f) $\Longrightarrow$ ha $x \in f$, akkor majd x-et visszük fel,

S-fák

Splay-tree: D. D. Sleator és R. E. Tarjan, 1983.
Olyan bináris fa, ami tanul: pl. gyakran keresett elemet feljebb teszi.
$\Longrightarrow$ Hosszú átlagos műveletsor alatt az egy lépésre eső költség optimális lesz.
Fő öltlet:

> KIFORDÍT(x, f) átszervezi az f S-fát úgy, hogy x lesz az új gyökér, ha $x \in f$; különben f gyökere x valamelyik szomszédja lesz:
>
> vagy $\mathbf{max}\{y \in f;\ y < x\}$ vagy $\mathbf{min}\{y \in f;\ y > x\}$.

KIFORDÍT(x, f) implementációja: KERES(x, f) $\Longrightarrow$ ha $x \in f$, akkor majd x-et visszük fel, ha $x \notin f$, akkor a keresés x egyik szomszédjánál ($\mathbf{max}\{y \in f;\ y < x\}$ vagy $\mathbf{min}\{y \in f;\ y > x\}$) ér véget, vegyük ezt.

S-fák

Splay-tree: D. D. Sleator és R. E. Tarjan, 1983.
Olyan bináris fa, ami tanul: pl. gyakran keresett elemet feljebb teszi.
$\Longrightarrow$ Hosszú átlagos műveletsor alatt az egy lépésre eső költség optimális lesz.
Fő öltlet:

> KIFORDÍT(x, f) átszervezi az f S-fát úgy, hogy x lesz az új gyökér, ha $x \in f$; különben f gyökere x valamelyik szomszédja lesz:
>
> vagy $\mathbf{max}\{y \in f;\ y < x\}$ vagy $\mathbf{min}\{y \in f;\ y > x\}$.

KIFORDÍT(x, f) implementációja: KERES(x, f) $\Longrightarrow$ ha $x \in f$, akkor majd x-et visszük fel, ha $x \notin f$, akkor a keresés x egyik szomszédjánál ($\mathbf{max}\{y \in f;\ y < x\}$ vagy $\mathbf{min}\{y \in f;\ y > x\}$) ér véget, vegyük ezt.
$\Longrightarrow$ feltehetjük, hogy $x \in f$.

A következő eljárás x-et maximum két szinttel viszi feljebb, addig alkalmazzuk, amig x felér.

A következő eljárás x-et maximum két szinttel viszi feljebb, addig alkalmazzuk, amig x felér.

---

(0) Ha x gyökér, akkor készen vagyunk.

A következő eljárás x-et maximum két szinttel viszi feljebb, addig alkalmazzuk, amig x felér.

---

(0) Ha x gyökér, akkor készen vagyunk.
(* A továbbiakban jelölje y az x apját. *)
(1) Ha x-nek nincs nagyapja, akkor FORGAT(x), különben

A következő eljárás x-et maximum két szinttel viszi feljebb, addig alkalmazzuk, amig x felér.

---

(0) Ha x gyökér, akkor készen vagyunk.
(* A továbbiakban jelölje y az x apját. *)
(1) Ha x-nek nincs nagyapja, akkor FORGAT(x), különben

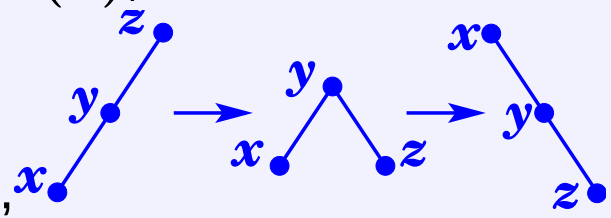
(2) ha x és y is baloldali (jobboldali) gyerek,

A következő eljárás x-et maximum két szinttel viszi feljebb, addig alkalmazzuk, amig x felér.

---

(0) Ha x gyökér, akkor készen vagyunk.
(* A továbbiakban jelölje y az x apját. *)
(1) Ha x-nek nincs nagyapja, akkor FORGAT(x), különben

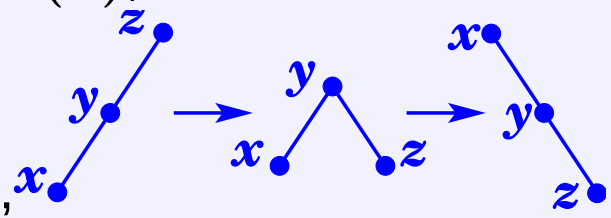
(2) ha x és y is baloldali (jobboldali) gyerek,



A következő eljárás x-et maximum két szinttel viszi feljebb, addig alkalmazzuk, amig x felér.

---

(0) Ha x gyökér, akkor készen vagyunk.
(* A továbbiakban jelölje y az x apját. *)
(1) Ha x-nek nincs nagyapja, akkor FORGAT(x), különben



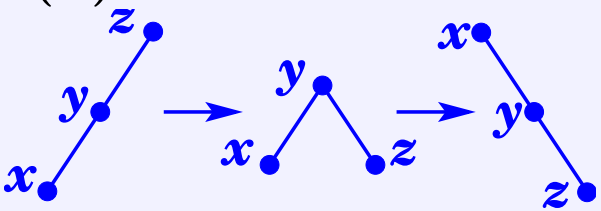
(2) ha x és y is baloldali (jobboldali) gyerek,
akkor FORGAT(y), majd FORGAT(x), különben
(3) ha x és y különböző oldali gyerekek,

akkor FORGAT(x), majd ismét FORGAT(x).

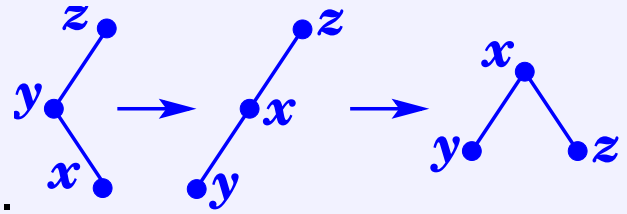
A következő eljárás x-et maximum két szinttel viszi feljebb, addig alkalmazzuk, amig x felér.

---

(0) Ha x gyökér, akkor készen vagyunk.
(* A továbbiakban jelölje y az x apját. *)
(1) Ha x-nek nincs nagyapja, akkor FORGAT(x), különben



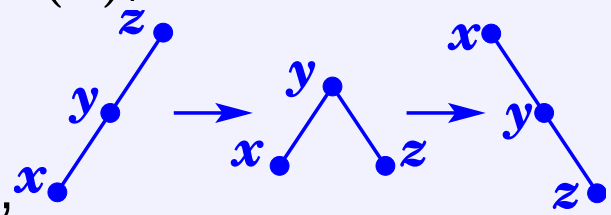
(2) ha x és y is baloldali (jobboldali) gyerek,
akkor FORGAT(y), majd FORGAT(x), különben
(3) ha x és y különböző oldali gyerekek,



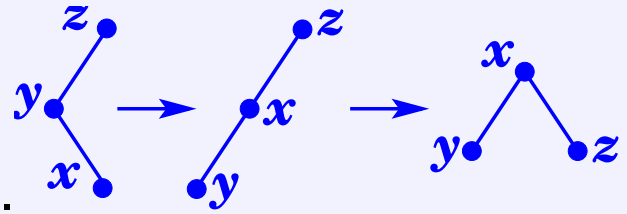
akkor FORGAT(x), majd ismét FORGAT(x).

A következő eljárás x-et maximum két szinttel viszi feljebb, addig alkalmazzuk, amig x felér.

(0) Ha x gyökér, akkor készen vagyunk.
(* A továbbiakban jelölje y az x apját. *)
(1) Ha x-nek nincs nagyapja, akkor FORGAT(x), különben



(2) ha x és y is baloldali (jobboldali) gyerek,
akkor FORGAT(y), majd FORGAT(x), különben
(3) ha x és y különböző oldali gyerekek,



akkor FORGAT(x), majd ismét FORGAT(x).

Műveletek az S-fákban

A keresőfákra jellemző KERES(x, f), BESZÚR(x, f) és TÖRÖL(x, f) műveletek a szokásosak.

Műveletek az S-fákban

A keresőfákra jellemző KERES(x, f), BESZÚR(x, f) és TÖRÖL(x, f) műveletek a szokásosak.
A RAGASZT(f, f') művelet az f és f' S-fákból egyetlen S-fát szervez, feltéve, hogy $x < y$ teljesül minden $x \in f$ és $y \in f'$ kulcsra.

Műveletek az S-fákban

A keresőfákra jellemző KERES(x, f), BESZÚR(x, f) és TÖRÖL(x, f) műveletek a szokásosak.
A RAGASZT(f, f') művelet az f és f' S-fákból egyetlen S-fát szervez, feltéve, hogy $x < y$ teljesül minden $x \in f$ és $y \in f'$ kulcsra.
A VÁG(x, f) művelet szétvágja f-et az f' és f'' S-fákra úgy, hogy $y \leq x \leq z$ teljesül minden $y \in f'$ és $z \in f''$ csúcsra.

Műveletek az S-fákban

A keresőfákra jellemző KERES(x, f), BESZÚR(x, f) és TÖRÖL(x, f) műveletek a szokásosak.
A RAGASZT(f, f') művelet az f és f' S-fákból egyetlen S-fát szervez, feltéve, hogy $x < y$ teljesül minden $x \in f$ és $y \in f'$ kulcsra.
A VÁG(x, f) művelet szétvágja f-et az f' és f'' S-fákra úgy, hogy $y \leq x \leq z$ teljesül minden $y \in f'$ és $z \in f''$ csúcsra.
Tétel. *Az ismertetett műveletek mindegyike megvalósítható konstans számú KIFORDÍT és konstans számú elemi operáció (összehasonlítás, mutató beállítás, stb.) segítségével.*

Bizonyítás: Csak két művelet, a RAGASZT és a TÖRÖL esetét nézzük meg közelebbről, többi trivi.

Műveletek az S-fákban

A keresőfákra jellemző KERES(x, f), BESZÚR(x, f) és TÖRÖL(x, f) műveletek a szokásosak.
A RAGASZT(f, f') művelet az f és f' S-fákból egyetlen S-fát szervez, feltéve, hogy $x < y$ teljesül minden $x \in f$ és $y \in f'$ kulcsra.
A VÁG(x, f) művelet szétvágja f-et az f' és f'' S-fákra úgy, hogy $y \leq x \leq z$ teljesül minden $y \in f'$ és $z \in f''$ csúcsra.
Tétel. *Az ismertetett műveletek mindegyike megvalósítható konstans számú KIFORDÍT és konstans számú elemi operáció (összehasonlítás, mutató beállítás, stb.) segítségével.*

Bizonyítás: Csak két művelet, a RAGASZT és a TÖRÖL esetét nézzük meg közelebbről, többi trivi.

RAGASZT(f, f') $\Longrightarrow$ először KIFORDÍT($+\infty, f$) $=: f^*$

Műveletek az S-fákban

A keresőfákra jellemző KERES(x, f), BESZÚR(x, f) és TÖRÖL(x, f) műveletek a szokásosak.
A RAGASZT(f, f') művelet az f és f' S-fákból egyetlen S-fát szervez, feltéve, hogy $x < y$ teljesül minden $x \in f$ és $y \in f'$ kulcsra.
A VÁG(x, f) művelet szétvágja f-et az f' és f'' S-fákra úgy, hogy $y \leq x \leq z$ teljesül minden $y \in f'$ és $z \in f''$ csúcsra.
Tétel. *Az ismertetett műveletek mindegyike megvalósítható konstans számú KIFORDÍT és konstans számú elemi operáció (összehasonlítás, mutató beállítás, stb.) segítségével.*

Bizonyítás: Csak két művelet, a RAGASZT és a TÖRÖL esetét nézzük meg közelebbről, többi trivi.

RAGASZT(f, f') $\Longrightarrow$ először KIFORDÍT($+\infty, f$) $=: f^* \Longrightarrow$ f^* gyökere x az új fa legnagyobb kulcsa

Műveletek az S-fákban

A keresőfákra jellemző KERES(x, f), BESZÚR(x, f) és TÖRÖL(x, f) műveletek a szokásosak.
A RAGASZT(f, f') művelet az f és f' S-fákból egyetlen S-fát szervez, feltéve, hogy $x < y$ teljesül minden $x \in f$ és $y \in f'$ kulcsra.
A VÁG(x, f) művelet szétvágja f-et az f' és f'' S-fákra úgy, hogy $y \leq x \leq z$ teljesül minden $y \in f'$ és $z \in f''$ csúcsra.
Tétel. *Az ismertetett műveletek mindegyike megvalósítható konstans számú KIFORDÍT és konstans számú elemi operáció (összehasonlítás, mutató beállítás, stb.) segítségével.*

Bizonyítás: Csak két művelet, a RAGASZT és a TÖRÖL esetét nézzük meg közelebbről, többi trivi.

RAGASZT(f, f') $\Longrightarrow$ először KIFORDÍT($+\infty$, f) $=: f^* \Longrightarrow$ f^* gyökere x az új fa legnagyobb kulcsa
$\Longrightarrow$ csatoljuk f'-t x jobb fiának

Műveletek az S-fákban

A keresőfákra jellemző KERES(x, f), BESZÚR(x, f) és TÖRÖL(x, f) műveletek a szokásosak.
A RAGASZT(f, f') művelet az f és f' S-fákból egyetlen S-fát szervez, feltéve, hogy $x < y$ teljesül minden $x \in f$ és $y \in f'$ kulcsra.
A VÁG(x, f) művelet szétvágja f-et az f' és f'' S-fákra úgy, hogy $y \leq x \leq z$ teljesül minden $y \in f'$ és $z \in f''$ csúcsra.
Tétel. *Az ismertetett műveletek mindegyike megvalósítható konstans számú KIFORDÍT és konstans számú elemi operáció (összehasonlítás, mutató beállítás, stb.) segítségével.*

Bizonyítás: Csak két művelet, a RAGASZT és a TÖRÖL esetét nézzük meg közelebbről, többi trivi.

RAGASZT(f, f') $\Longrightarrow$ először KIFORDÍT($+\infty$, f) $=: f^* \Longrightarrow$ f^* gyökere x az új fa legnagyobb kulcsa
$\Longrightarrow$ csatoljuk f'-t x jobb fiának

$$\text{TÖRÖL}(x, f) \implies \text{KIFORDÍT}(x, f)$$

TÖRÖL$(x, f) \implies$ KIFORDÍT(x, f)ha a kapott fa gyökere nem x, akkor $x \notin f \implies$ ✓

TÖRÖL$(x, f) \implies$ KIFORDÍT(x, f)ha a kapott fa gyökere nem x, akkor $x \notin f \implies$ ✓

Ha x az új fa gyökere, töröljük és a kapott két f_1 és f_2 részfára RAGASZT(f_1, f_2)

TÖRÖL$(x, f) \implies$ KIFORDÍT(x, f)ha a kapott fa gyökere nem x, akkor $x \notin f \implies$ ✓

Ha x az új fa gyökere, töröljük és a kapott két f_1 és f_2 részfára RAGASZT(f_1, f_2)

Tétel. *Egy üres S-fából induló olyan m műveletből álló sorozat költsége, melyben n beszúrás van, $O(m \log n)$.*

TÖRÖL$(x, f) \implies$ KIFORDÍT(x, f)ha a kapott fa gyökere nem x, akkor $x \notin f \implies$ ✓

Ha x az új fa gyökere, töröljük és a kapott két f_1 és f_2 részfára RAGASZT(f_1, f_2)

Tétel. *Egy üres S-fából induló olyan m műveletből álló sorozat költsége, melyben n beszúrás van, $O(m \log n)$.*

Java animáció: S-fa