Algoritmuselmélet 16. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu

2002 Április 29.

Konjunktív normálforma

Konjunktív normál forma:

$$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13}) \wedge \ldots$$

Konjunktív normálforma

Konjunktív normál forma:

$$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13}) \wedge \ldots$$

Tétel. *Minden Boole-formulának létezik konjuktív normál formája.*

Konjunktív normálforma

Konjunktív normál forma:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13}) \wedge \ldots$

Tétel. *Minden Boole-formulának létezik konjuktív normál formája.*

k-konjunktív normál forma: ha $\phi = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, akkor minden ϕ_i-ben legfeljebb k literál szerepel. Pl.: 4-CNF:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13})$.

Konjunktív normálforma

Konjunktív normál forma:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13}) \wedge \ldots$

Tétel. *Minden Boole-formulának létezik konjuktív normál formája.*

k-konjunktív normál forma: ha $\phi = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, akkor minden ϕ_i-ben legfeljebb k literál szerepel. Pl.: 4-CNF:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13})$.

Definíció. *Jelölje k-SAT a kielégíthető k-CNF-ekből álló nyelvet.*

Konjunktív normálforma

Konjunktív normál forma:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13}) \wedge \ldots$

Tétel. *Minden Boole-formulának létezik konjuktív normál formája.*

k-konjunktív normál forma: ha $\phi = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, akkor minden ϕ_i-ben legfeljebb k literál szerepel. Pl.: 4-CNF:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13})$.

Definíció. *Jelölje k-SAT a kielégíthető k-CNF-ekből álló nyelvet.*

k-SAT $\in \mathrm{NP} \;\Longleftarrow$ tanú egy kielégítés

Konjunktív normálforma

Konjunktív normál forma:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13}) \wedge \dots$

Tétel. *Minden Boole-formulának létezik konjuktív normál formája.*

k-konjunktív normál forma: ha $\phi = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, akkor minden ϕ_i-ben legfeljebb k literál szerepel. Pl.: 4-CNF:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13})$.

Definíció. *Jelölje k-SAT a kielégíthető k-CNF-ekből álló nyelvet.*

k-SAT $\in \mathrm{NP} \Longleftarrow$ tanú egy kielégítés

Tétel. *2-SAT $\in \mathrm{P}$.*

Konjunktív normálforma

Konjunktív normál forma:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13}) \wedge \ldots$

Tétel. *Minden Boole-formulának létezik konjuktív normál formája.*

k-konjunktív normál forma: ha $\phi = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, akkor minden ϕ_i-ben legfeljebb k literál szerepel. Pl.: 4-CNF:
$(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee \overline{x}_7 \vee \overline{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \overline{x}_{10} \vee \overline{x}_{13})$.

Definíció. *Jelölje k-SAT a kielégíthető k-CNF-ekből álló nyelvet.*

k-SAT $\in \mathrm{NP} \Longleftarrow$ tanú egy kielégítés

Tétel. *2-SAT $\in \mathrm{P}$.*

Tétel. *3-SAT NP-teljes.*

Tétel. *3-SAT* NP*-teljes.*

Tétel. *3-SAT $\mathcal{NP}$-teljes.*

Bizonyítás: Belátjuk, hogy SAT $\prec$ 3-SAT.

Tétel. *3-SAT* NP*-teljes.*

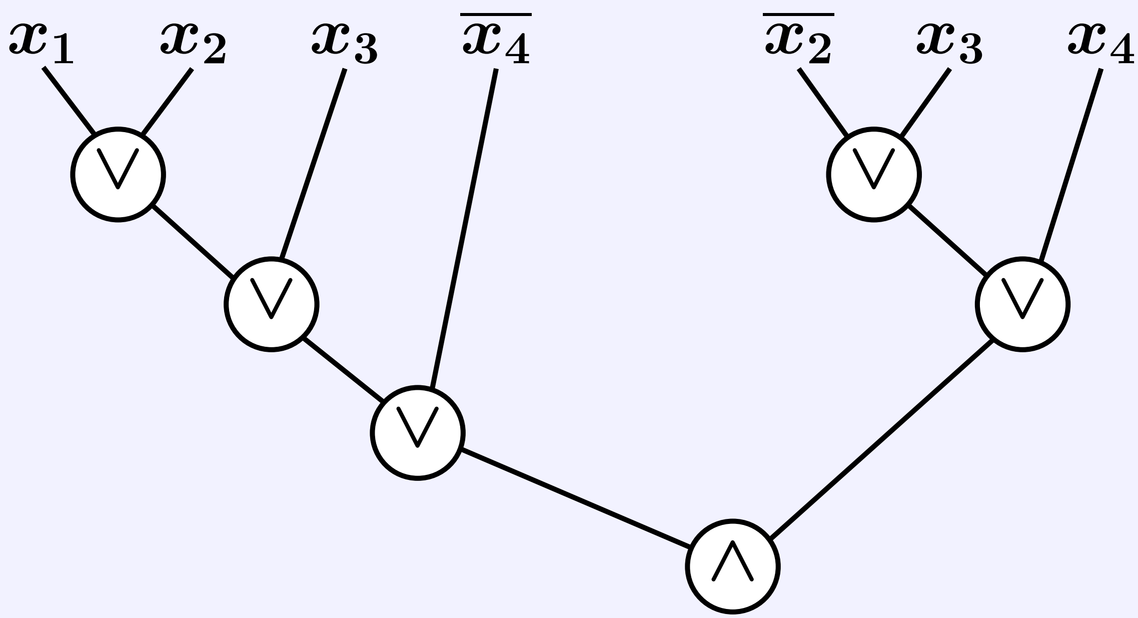
Bizonyítás: Belátjuk, hogy SAT $\prec$ 3-SAT.
Tetszőleges ϕ formulához kell adni egy ψ-t ami 3-CNF, ekvivalens ϕ-vel és polinom időben számolható.

Tétel. *3-SAT* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Belátjuk, hogy SAT $\prec$ 3-SAT.
Tetszőleges ϕ formulához kell adni egy ψ-t ami 3-CNF, ekvivalens ϕ-vel és polinom időben számolható.

Kifejezésfa:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$$



A kifejezésfa minden csúcsához rendeljünk egy új változót: z_i és egy ϕ_i Boole-formulát, ami megadja z_i értékét:

A kifejezésfa minden csúcsához rendeljünk egy új változót: z_i és egy ϕ_i Boole-formulát, ami megadja z_i értékét:

$u \leftrightarrow v = (u \vee \overline{v}) \wedge (\overline{u} \vee v)$

A kifejezésfa minden csúcsához rendeljünk egy új változót: z_i
és egy ϕ_i Boole-formulát, ami megadja z_i értékét:
$u \leftrightarrow v = (u \vee \overline{v}) \wedge (\overline{u} \vee v)$

$$
\begin{aligned}
z_i = z_j \wedge z_k \quad &= \quad z_i \leftrightarrow (z_j \wedge z_k) = \\
&= \quad (z_i \vee \overline{(z_j \wedge z_k)}) \wedge (\overline{z_i} \vee (z_j \wedge z_k)) = \\
&= \quad (z_i \vee \overline{z_j} \vee \overline{z_k}) \wedge (\overline{z_i} \vee z_j) \wedge (\overline{z_i} \vee z_k)
\end{aligned}
$$

A kifejezésfa minden csúcsához rendeljünk egy új változót: z_i
és egy ϕ_i Boole-formulát, ami megadja z_i értékét:
$u \leftrightarrow v = (u \vee \overline{v}) \wedge (\overline{u} \vee v)$

$$\begin{aligned}
z_i = z_j \wedge z_k \quad &= \quad z_i \leftrightarrow (z_j \wedge z_k) = \\
&= \quad (z_i \vee \overline{(z_j \wedge z_k)}) \wedge (\overline{z_i} \vee (z_j \wedge z_k)) = \\
&= \quad (z_i \vee \overline{z_j} \vee \overline{z_k}) \wedge (\overline{z_i} \vee z_j) \wedge (\overline{z_i} \vee z_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_i = z_j \vee z_k \quad &= \quad z_i \leftrightarrow (z_j \vee z_k) = \\
&= \quad (z_i \vee \overline{(z_j \vee z_k)}) \wedge (\overline{z_i} \vee (z_j \vee z_k)) = \\
&= \quad (z_i \vee \overline{z_j}) \wedge (z_i \vee \overline{z_k}) \wedge (\overline{z_i} \vee z_j \vee z_k)
\end{aligned}$$

$$\psi = (\wedge \phi_i) \wedge z_m$$

Ez ekvivalens ϕ-vel, és polinom időben számolható. $\checkmark$

3-SZÍN

Tétel. *A 3-SZÍN nyelv* NP*-teljes.*

3-SZÍN

Tétel. *A 3-SZÍN nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy $\in \mathrm{NP}$, belátjuk, hogy 3-SAT $\prec$ 3-SZÍN.

3-SZÍN

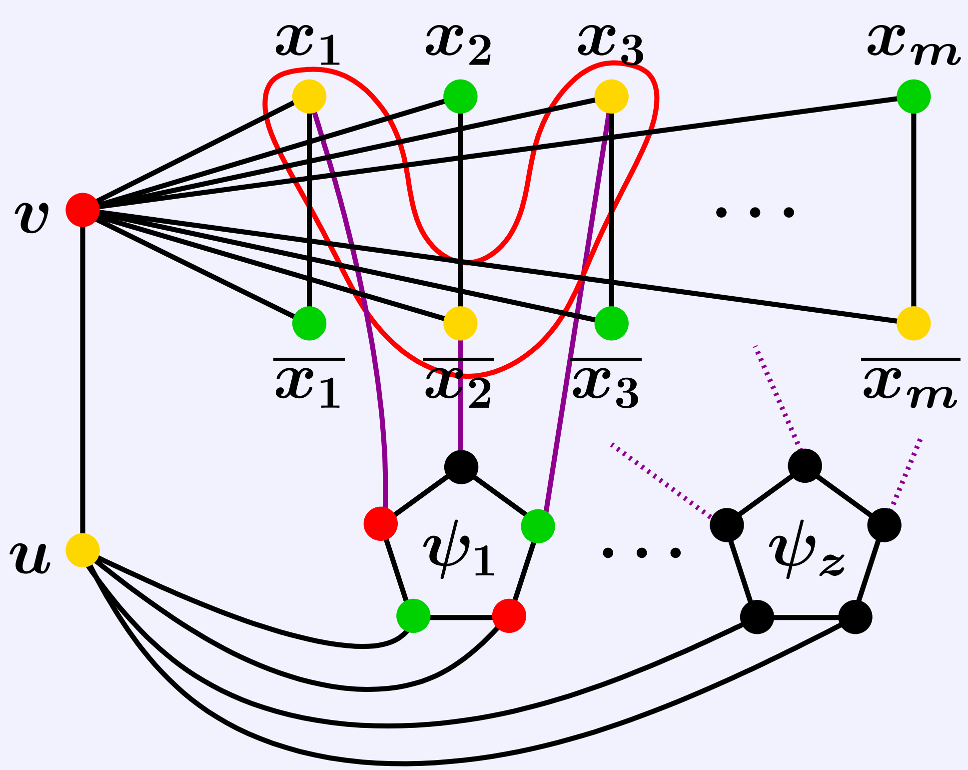
Tétel. *A 3-SZÍN nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy $\in \mathrm{NP}$, belátjuk, hogy 3-SAT $\prec$ 3-SZÍN. Tetszőleges ψ 3-CNF-hez építenünk kell egy G gráfot úgy, hogy $\psi \in$ 3-SAT pont akkor igaz, ha $G \in$ 3-SZÍN.

3-SZÍN

Tétel. *A 3-SZÍN nyelv* NP*-teljes.*

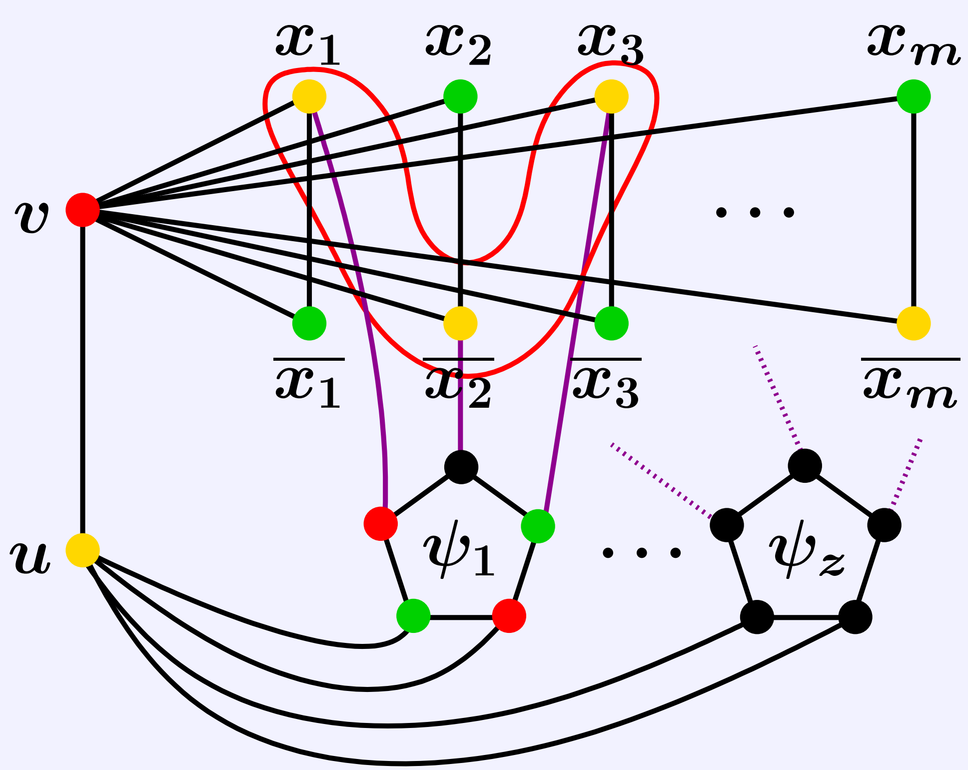
Bizonyítás: Már láttuk, hogy $\in \mathrm{NP}$, belátjuk, hogy 3-SAT $\prec$ 3-SZÍN. Tetszőleges ψ 3-CNF-hez építenünk kell egy G gráfot úgy, hogy $\psi \in$ 3-SAT pont akkor igaz, ha $G \in$ 3-SZÍN.



3-SZÍN

Tétel. *A 3-SZÍN nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy $\in \mathrm{NP}$, belátjuk, hogy 3-SAT $\prec$ 3-SZÍN. Tetszőleges ψ 3-CNF-hez építenünk kell egy G gráfot úgy, hogy $\psi \in$ 3-SAT pont akkor igaz, ha $G \in$ 3-SZÍN.

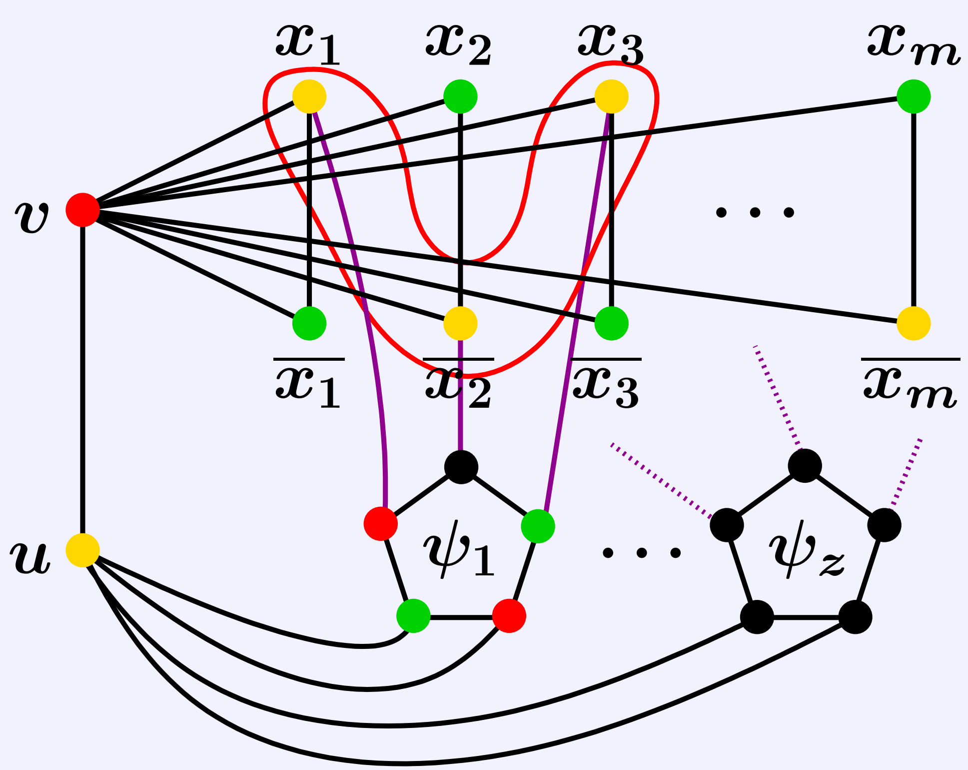


Zöld igen

3-SZÍN

Tétel. *A 3-SZÍN nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy $\in \mathrm{NP}$, belátjuk, hogy 3-SAT $\prec$ 3-SZÍN. Tetszőleges ψ 3-CNF-hez építenünk kell egy G gráfot úgy, hogy $\psi \in$ 3-SAT pont akkor igaz, ha $G \in$ 3-SZÍN.



Zöld igen $\Longrightarrow$ minden ψ_i-ben van zöld.

Maximális méretű független pontrendszer gráfokban

$$\text{MAXFTLEN} = \left\{ (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{k}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{G} \text{ egy gráf, } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^{+}, \text{ és} \\ \boldsymbol{G}\text{-nek van } \boldsymbol{k} \text{ elemű független csúcshalmaza} \end{array} \right\}.$$

Maximális méretű független pontrendszer gráfokban

$$\text{MAXFTLEN} = \left\{ (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{k}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{G} \text{ egy gráf, } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^+, \text{ és} \\ \boldsymbol{G}\text{-nek van } \boldsymbol{k} \text{ elemű független csúcshalmaza} \end{array} \right\}.$$

Tétel. *A MAXFTLEN nyelv* NP*-teljes.*

Maximális méretű független pontrendszer gráfokban

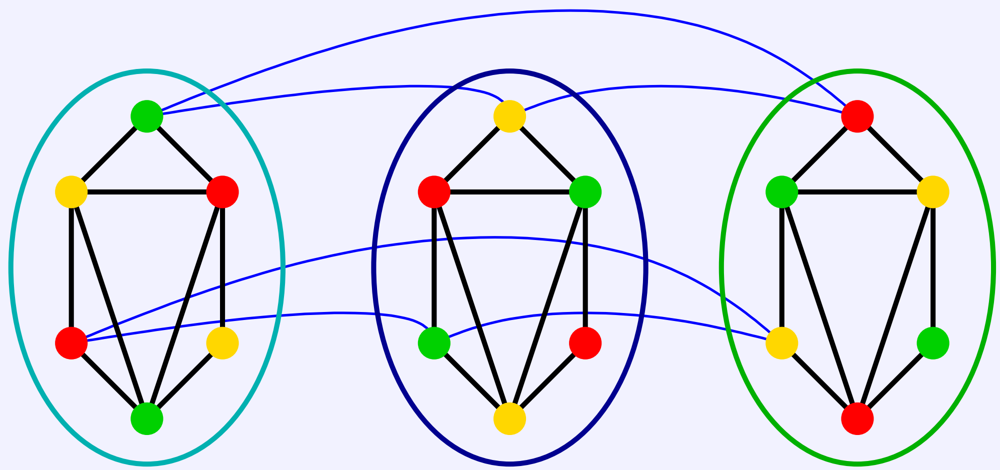
$$\text{MAXFTLEN} = \left\{ (G, k) \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ egy gráf, } k \in \mathbb{Z}^+, \text{ és} \\ G\text{-nek van } k \text{ elemű független csúcshalmaza} \end{array} \right\}.$$

Tétel. *A MAXFTLEN nyelv* NP*-teljes.*

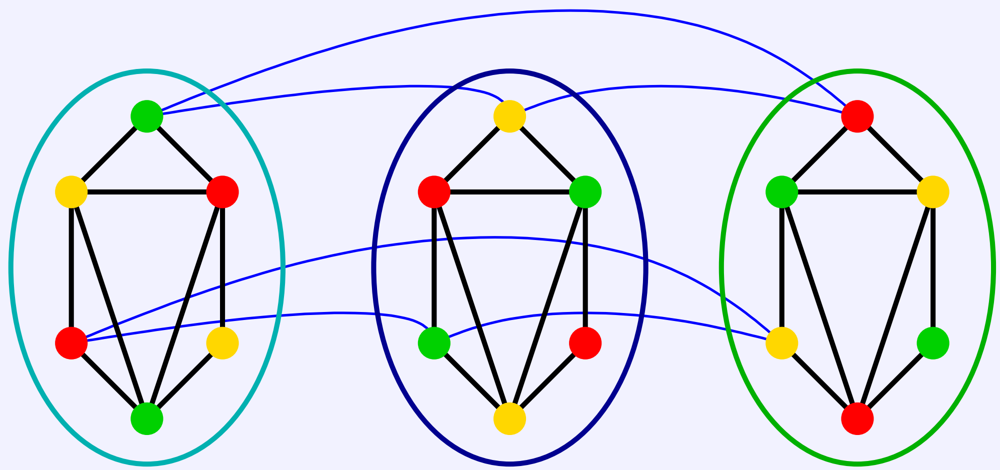
Bizonyítás: MAXFTLEN $\in$ NP: tanú egy k-elemű $S \subseteq V(G)$ független csúcshalmaz. ✓

Megadunk egy 3-SZÍN $\prec$ MAXFTLEN Karp-redukciót, $G \to G_1$

$$G \in \text{3-SZÍN pontosan akkor, ha } (G_1, k) \in \text{MAXFTLEN}. \qquad (*)$$

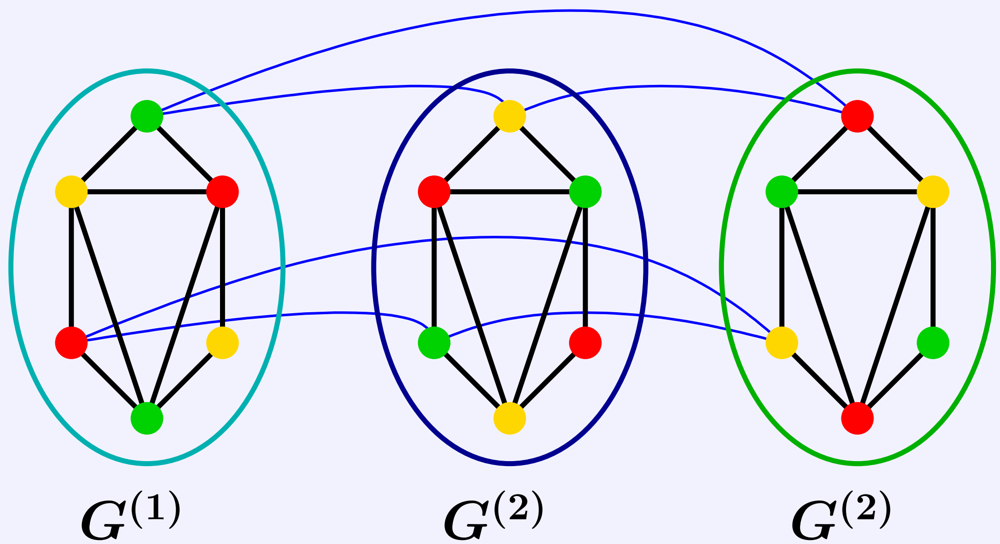


$G^{(1)}$ $G^{(2)}$ $G^{(2)}$



$G^{(1)}$ $G^{(2)}$ $G^{(2)}$

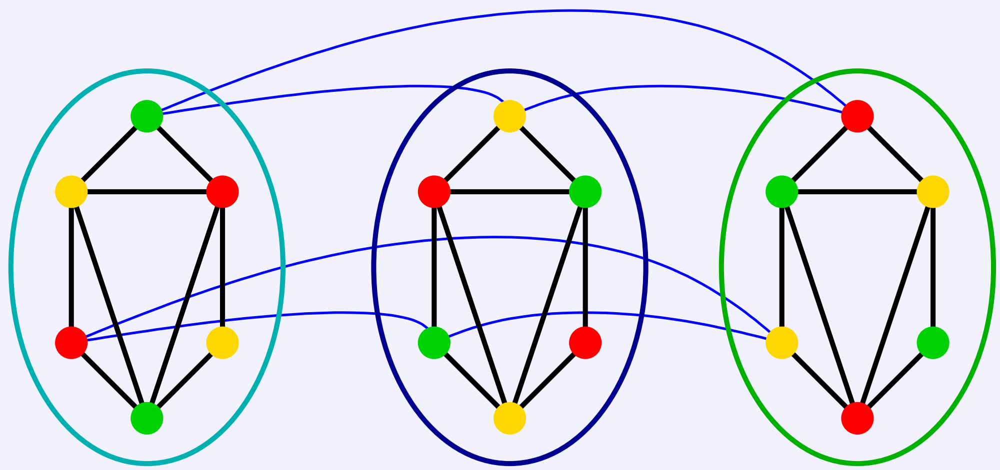
$|V(G_1)| = 3|V(G)|$ és $|E(G_1)| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k = |V(G)|$.



$$|V(G_1)| = 3|V(G)| \text{ és } |E(G_1)| = 3|V(G)| + 3|E(G)|,$$
$$\text{legyen } k = |V(G)|.$$

Ha G színezhető 3 színnel $\implies$ legyen H a piros pontok halmaza G_1-ben.

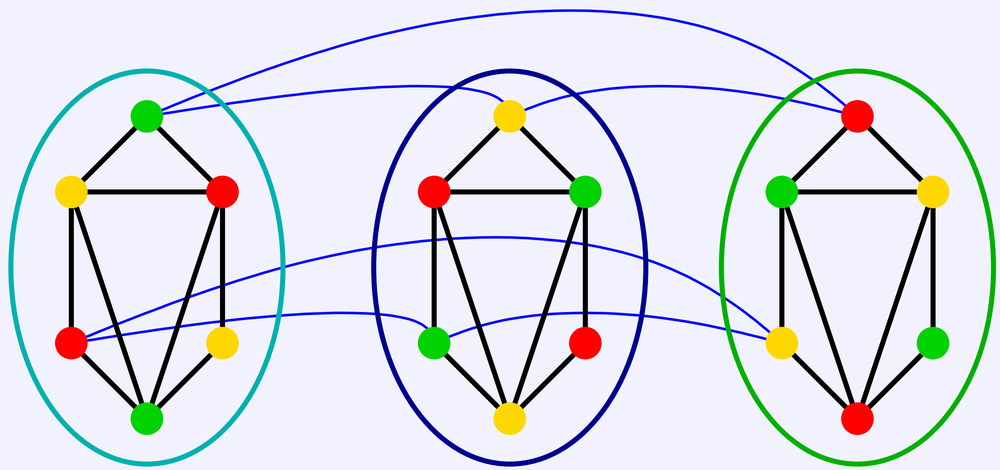
✓



$$|V(G_1)| = 3|V(G)| \text{ és } |E(G_1)| = 3|V(G)| + 3|E(G)|,$$
$$\text{legyen } k = |V(G)|.$$

Ha G színezhető 3 színnel $\Longrightarrow$ legyen H a piros pontok halmaza G_1-ben. $\checkmark$

Ha G_1-ben van $|V(G)|$ független $\Longrightarrow$ legyen egy pont színe olyan, hogy melyik $G^{(i)}$-ben van. $\checkmark$

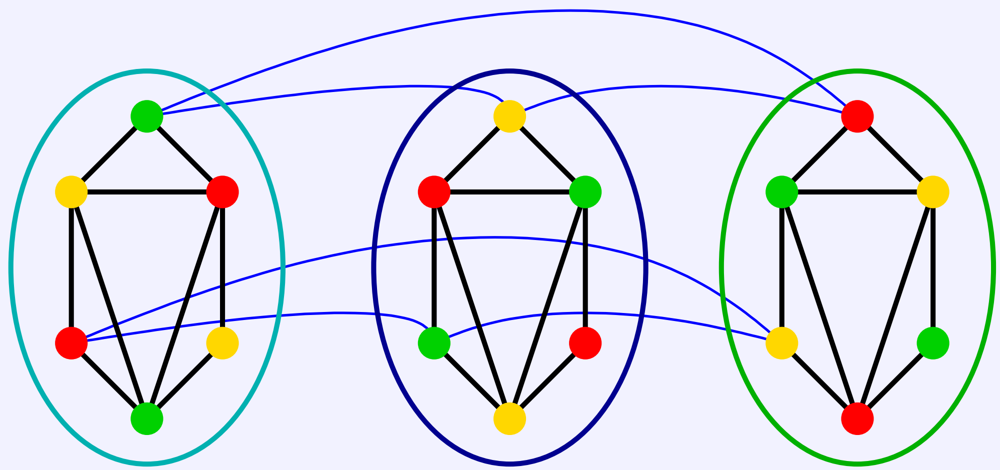


$$|V(G_1)| = 3|V(G)| \text{ és } |E(G_1)| = 3|V(G)| + 3|E(G)|,$$
$$\text{legyen } k = |V(G)|.$$

Ha G színezhető 3 színnel $\implies$ legyen H a piros pontok halmaza G_1-ben.
$\checkmark$

Ha G_1-ben van $|V(G)|$ független $\implies$ legyen egy pont színe olyan, hogy melyik $G^{(i)}$-ben van. $\checkmark$

MAXKLIKK $= \{(G, k)|$ G-ben van k pontú teljes részgráf$\}$.



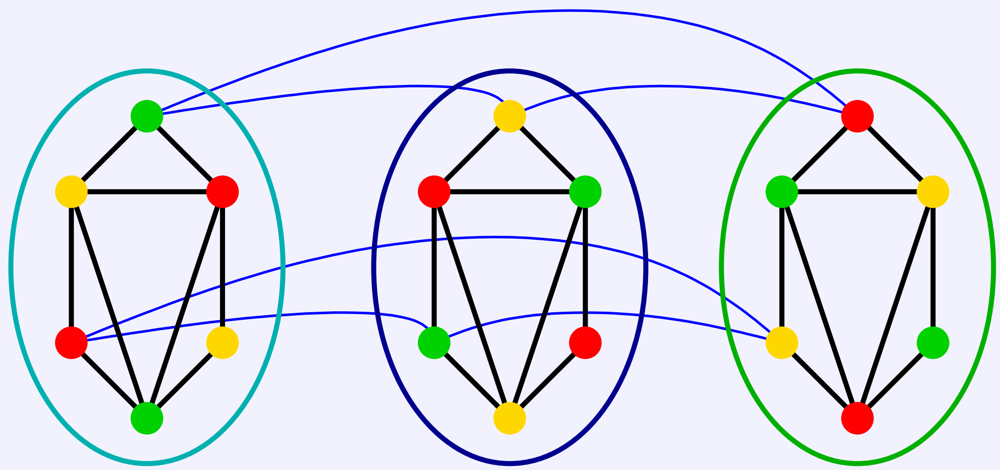
$$|V(G_1)| = 3|V(G)| \text{ és } |E(G_1)| = 3|V(G)| + 3|E(G)|,$$
$$\text{legyen } k = |V(G)|.$$

Ha G színezhető 3 színnel $\Longrightarrow$ legyen H a piros pontok halmaza G_1-ben. $\surd$

Ha G_1-ben van $|V(G)|$ független $\Longrightarrow$ legyen egy pont színe olyan, hogy melyik $G^{(i)}$-ben van. $\surd$

$$\text{MAXKLIKK} = \{(G, k) |\ G\text{-ben van } k \text{ pontú teljes részgráf}\}.$$

Tétel. *A MAXKLIKK nyelv* NP*-teljes.*



$G^{(1)}$ $G^{(2)}$ $G^{(2)}$

$$|V(G_1)| = 3|V(G)| \text{ és } |E(G_1)| = 3|V(G)| + 3|E(G)|,$$
legyen $k = |V(G)|$.

Ha G színezhető 3 színnel $\Longrightarrow$ legyen H a piros pontok halmaza G_1-ben. $\surd$

Ha G_1-ben van $|V(G)|$ független $\Longrightarrow$ legyen egy pont színe olyan, hogy melyik $G^{(i)}$-ben van. $\surd$

MAXKLIKK $= \{(G, k) |$ G-ben van k pontú teljes részgráf$\}$.

Tétel. *A MAXKLIKK nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $G \leftrightarrow \overline{G}$ $\surd$

A 3 dimenziós házasítás

Párosítási feladat általánosítása: Legyenek U_1, U_2, U_3 azonos méretű véges halmazok $\Longrightarrow |U_i| = t$.

A 3 dimenziós házasítás

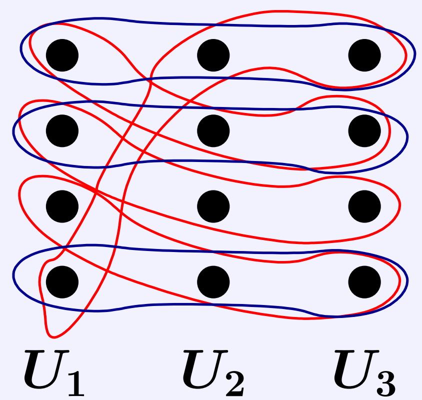
Párosítási feladat általánosítása: Legyenek U_1, U_2, U_3 azonos méretű véges halmazok $\Longrightarrow |U_i| = t$.
Adott még $U_1 \times U_2 \times U_3$ valamely S részhalmaza $\Longrightarrow (u_1, u_2, u_3)$ alakú hármasok

A 3 dimenziós házasítás

Párosítási feladat általánosítása: Legyenek U_1, U_2, U_3 azonos méretű véges halmazok $\Longrightarrow |U_i| = t$.
Adott még $U_1 \times U_2 \times U_3$ valamely S részhalmaza $\Longrightarrow (u_1, u_2, u_3)$ alakú hármasok
Kiválasztható-e S-ből egy *3 dimenziós házasítás*?

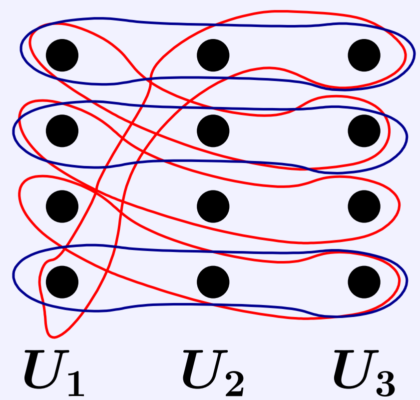
A 3 dimenziós házasítás

Párosítási feladat általánosítása: Legyenek U_1, U_2, U_3 azonos méretű véges halmazok $\Longrightarrow |U_i| = t$.
Adott még $U_1 \times U_2 \times U_3$ valamely S részhalmaza $\Longrightarrow (u_1, u_2, u_3)$ alakú hármasok
Kiválasztható-e S-ből egy *3 dimenziós házasítás*?
$\Longrightarrow$ olyan t-elemű $S' \subseteq S$ részhalmaz, mely minden U_i-beli pontot lefed.



A 3 dimenziós házasítás

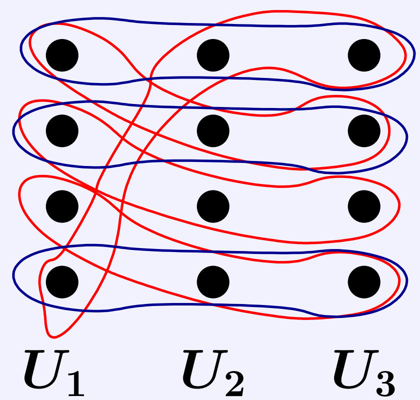
Párosítási feladat általánosítása: Legyenek U_1, U_2, U_3 azonos méretű véges halmazok $\Longrightarrow |U_i| = t$.
Adott még $U_1 \times U_2 \times U_3$ valamely S részhalmaza $\Longrightarrow (u_1, u_2, u_3)$ alakú hármasok
Kiválasztható-e S-ből egy *3 dimenziós házasítás*?
$\Longrightarrow$ olyan t-elemű $S' \subseteq S$ részhalmaz, mely minden U_i-beli pontot lefed.



3-DH: olyan U_1, U_2, U_3; $S \subseteq U_1 \times U_2 \times U_3$ rendszerek, melyeknél S-ből kiválasztható egy 3 dimenziós házasítás.

A 3 dimenziós házasítás

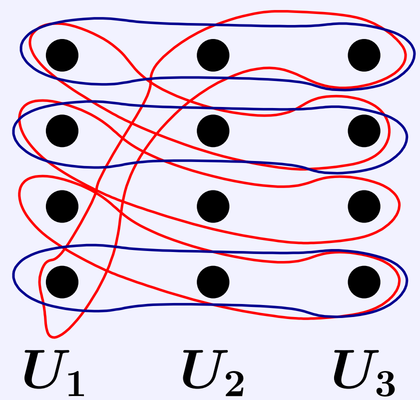
Párosítási feladat általánosítása: Legyenek U_1, U_2, U_3 azonos méretű véges halmazok $\Longrightarrow |U_i| = t$.
Adott még $U_1 \times U_2 \times U_3$ valamely S részhalmaza $\Longrightarrow (u_1, u_2, u_3)$ alakú hármasok
Kiválasztható-e S-ből egy *3 dimenziós házasítás*?
$\Longrightarrow$ olyan t-elemű $S' \subseteq S$ részhalmaz, mely minden U_i-beli pontot lefed.



3-DH: olyan $U_1, U_2, U_3;\ S \subseteq U_1 \times U_2 \times U_3$ rendszerek, melyeknél S-ből kiválasztható egy 3 dimenziós házasítás.
Tétel. *A 3-DH feladat* NP*-teljes.*

A 3 dimenziós házasítás

Párosítási feladat általánosítása: Legyenek U_1, U_2, U_3 azonos méretű véges halmazok $\Longrightarrow |U_i| = t$.
Adott még $U_1 \times U_2 \times U_3$ valamely S részhalmaza $\Longrightarrow (u_1, u_2, u_3)$ alakú hármasok
Kiválasztható-e S-ből egy *3 dimenziós házasítás*?
$\Longrightarrow$ olyan t-elemű $S' \subseteq S$ részhalmaz, mely minden U_i-beli pontot lefed.



3-DH: olyan $U_1, U_2, U_3;\ S \subseteq U_1 \times U_2 \times U_3$ rendszerek, melyeknél S-ből kiválasztható egy 3 dimenziós házasítás.
Tétel. *A 3-DH feladat* NP*-teljes.*

Bizonyítás: 3-DH $\in$ NP ✓ $\exists$ 3-SAT $\prec$ 3-DH

X3C

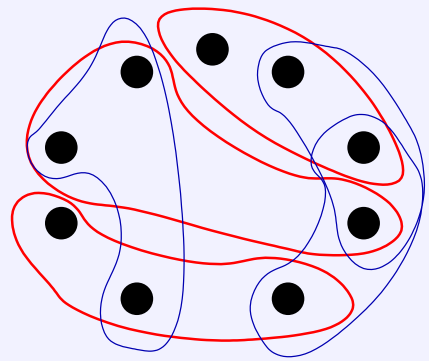
Pontos fedés hármasokkal: adott egy $\boldsymbol{U}$ véges halmaz, és $\boldsymbol{U}$ háromelemű részhalmazainak egy $\boldsymbol{\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}}$ családja.

X3C

Pontos fedés hármasokkal: adott egy U véges halmaz, és U háromelemű részhalmazainak egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ családja.
Eldöntendő, hogy az $\mathcal{F}$-ből kiválaszthatók-e páronként diszjunkt halmazok, melyek együttesen lefedik U-t.

X3C

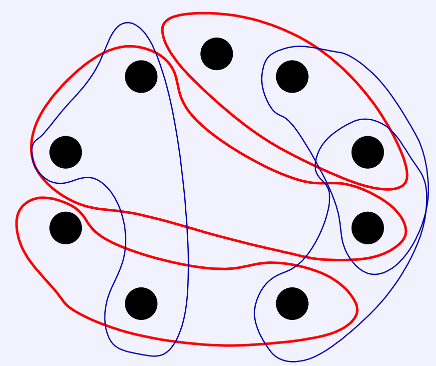
Pontos fedés hármasokkal: adott egy U véges halmaz, és U háromelemű részhalmazainak egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ családja.
Eldöntendő, hogy az $\mathcal{F}$-ből kiválaszthatók-e páronként diszjunkt halmazok, melyek együttesen lefedik U-t.
Jelölje X3C azokat az $(U, \mathcal{F})$ párokat, melyekre igen.



Tétel. *Az X3C nyelv* NP*-teljes.*

X3C

Pontos fedés hármasokkal: adott egy U véges halmaz, és U háromelemű részhalmazainak egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ családja.
Eldöntendő, hogy az $\mathcal{F}$-ből kiválaszthatók-e páronként diszjunkt halmazok, melyek együttesen lefedik U-t.
Jelölje X3C azokat az $(U, \mathcal{F})$ párokat, melyekre igen.

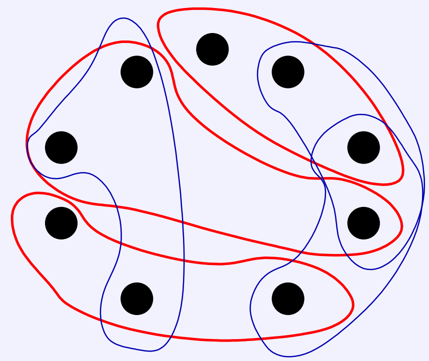


Tétel. *Az X3C nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: X3C $\in \mathrm{NP}$ teljesül $\Longrightarrow$ tanú egy pontos fedés.

X3C

Pontos fedés hármasokkal: adott egy U véges halmaz, és U háromelemű részhalmazainak egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ családja.
Eldöntendő, hogy az $\mathcal{F}$-ből kiválaszthatók-e páronként diszjunkt halmazok, melyek együttesen lefedik U-t.
Jelölje X3C azokat az $(U, \mathcal{F})$ párokat, melyekre igen.

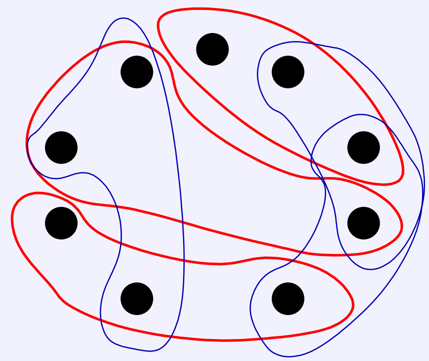


Tétel. *Az X3C nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: X3C $\in \mathrm{NP}$ teljesül $\Longrightarrow$ tanú egy pontos fedés.
Megmutatjuk, hogy 3-DH $\prec$ X3C.

X3C

Pontos fedés hármasokkal: adott egy U véges halmaz, és U háromelemű részhalmazainak egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ családja.
Eldöntendő, hogy az $\mathcal{F}$-ből kiválaszthatók-e páronként diszjunkt halmazok, melyek együttesen lefedik U-t.
Jelölje X3C azokat az $(U, \mathcal{F})$ párokat, melyekre igen.

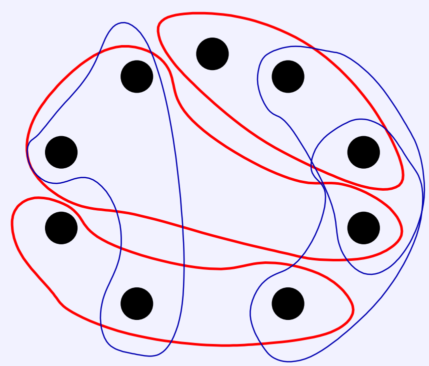


Tétel. *Az X3C nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: X3C $\in \mathrm{NP}$ teljesül $\Longrightarrow$ tanú egy pontos fedés.
Megmutatjuk, hogy 3-DH $\prec$ X3C.
X3C általánosabb probléma, mint 3-DH. Ha van algoritmus az általánosra, akkor avval a speciális is megoldható. $\surd$

X3C

Pontos fedés hármasokkal: adott egy U véges halmaz, és U háromelemű részhalmazainak egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ családja.
Eldöntendő, hogy az $\mathcal{F}$-ből kiválaszthatók-e páronként diszjunkt halmazok, melyek együttesen lefedik U-t.
Jelölje X3C azokat az $(U, \mathcal{F})$ párokat, melyekre igen.



Tétel. *Az X3C nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: X3C $\in$ NP teljesül $\Longrightarrow$ tanú egy pontos fedés.
Megmutatjuk, hogy 3-DH $\prec$ X3C.
X3C általánosabb probléma, mint 3-DH. Ha van algoritmus az általánosra, akkor avval a speciális is megoldható. $\surd$

Ha L NP-teljes és L' általánosítása L-nek, akkor L' is NP-teljes.

Utazó ügynök probléma

Tétel. *Az IH nyelv* NP*-teljes.*

Utazó ügynök probléma

Tétel. *Az IH nyelv* NP*-teljes.*

Tétel. *Az H nyelv* NP*-teljes.*

Utazó ügynök probléma

Tétel. *Az IH nyelv* NP*-teljes.*

Tétel. *Az H nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy H $\in \mathrm{NP}$ $\checkmark$

Utazó ügynök probléma

Tétel. *Az IH nyelv* NP*-teljes.*
Tétel. *Az H nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy H $\in$ NP $\checkmark$
és láttuk, hogy IH $\prec$ H $\checkmark$

Utazó ügynök probléma

Tétel. *Az IH nyelv* NP*-teljes.*
Tétel. *Az H nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy H $\in \mathrm{NP}$ $\surd$
és láttuk, hogy IH $\prec$ H $\surd$

Utazó ügynök feladat:
Adott egy G irányítatlan gráf pozitív egészekkel súlyozott élekkel.

Utazó ügynök probléma

Tétel. *Az IH nyelv* NP*-teljes.*
Tétel. *Az H nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy H $\in \mathrm{NP}$ $\checkmark$
és láttuk, hogy IH $\prec$ H $\checkmark$

Utazó ügynök feladat:
Adott egy G irányítatlan gráf pozitív egészekkel súlyozott élekkel.
A cél minél rövidebb összsúlyú Hamilton-kört találni G-ben.

Utazó ügynök probléma

Tétel. *Az IH nyelv* NP*-teljes.*
Tétel. *Az H nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy H $\in \mathrm{NP}$ $\checkmark$
és láttuk, hogy IH $\prec$ H $\checkmark$

Utazó ügynök feladat:
Adott egy G irányítatlan gráf pozitív egészekkel súlyozott élekkel.
A cél minél rövidebb összsúlyú Hamilton-kört találni G-ben.
$\Longrightarrow$ Ut nyelv $\Longrightarrow$ olyan (G, k) párokból áll, melyekben G egy súlyozott élű irányítatlan gráf, k egy nemnegatív egész, és G-ben van k-nál nem nagyobb súlyú Hamilton-kör.

Tétel. *Az* Ut *nyelv* NP*-teljes.*

Utazó ügynök probléma

Tétel. *Az IH nyelv* NP*-teljes.*
Tétel. *Az H nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: Már láttuk, hogy H $\in \mathrm{NP}$ $\surd$
és láttuk, hogy IH $\prec$ H $\surd$

Utazó ügynök feladat:
Adott egy G irányítatlan gráf pozitív egészekkel súlyozott élekkel.
A cél minél rövidebb összsúlyú Hamilton-kört találni G-ben.
$\Longrightarrow$ Ut nyelv $\Longrightarrow$ olyan (G, k) párokból áll, melyekben G egy súlyozott élű irányítatlan gráf, k egy nemnegatív egész, és G-ben van k-nál nem nagyobb súlyú Hamilton-kör.

Tétel. *Az* Ut *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: H általánosítása $\Longleftarrow$ minden él súlya 1 és $k = |V(G)|$ $\surd$

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:
adottak az $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyok, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:
adottak az $s_1, \dots, s_m > 0$ súlyok, ezek $v_1, \dots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.
Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:
adottak az $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyok, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.
Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.
A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, .., m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:
adottak az $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyok, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.
Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.
A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, .., m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.

$\Longrightarrow$ Input: $s_1, \ldots, s_m; v_1 \ldots, v_m; b; k$

$$\textit{Hát} = \{(s_1, s_2, \ldots, s_m; v_1, v_2, \ldots, v_m; b; k) | s_i, b, k > 0 \text{ egészek, és}$$

$$\text{van olyan } I \subseteq \{1, \ldots, m\} \text{ melyre } \sum_{i \in I} s_i \leq b \text{ és } \sum_{i \in I} v_i \geq k\}.$$

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:
adottak az $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyok, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.
Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.
A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, .., m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.

$\Longrightarrow$ Input: $s_1, \ldots, s_m; v_1 \ldots, v_m; b; k$

$$\textit{Hát} = \{(s_1, s_2, \ldots, s_m; v_1, v_2, \ldots, v_m; b; k) | s_i, b, k > 0 \text{ egészek, és}$$

$$\text{van olyan } I \subseteq \{1, \ldots, m\} \text{ melyre } \sum_{i \in I} s_i \leq b \text{ és } \sum_{i \in I} v_i \geq k\}.$$

Vegyük azt a speciális esetet, amikor $s_i = v_i$ és $b = k$:
Részhalmazösszeg probléma:

$$\text{RH} = \left\{ (s_1, \ldots, s_m; b) \;\middle|\; \begin{array}{l} s_i, b > 0 \text{ egészek,} \\ \text{és van olyan } I \subseteq \{1, \ldots, m\} \text{ hogy } \sum_{i \in I} s_i = b \end{array} \right\}.$$

Tétel. *Az RH nyelv* $\mathcal{NP}$*-teljes.*

Tétel. *Az RH nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{RH} \in \mathrm{NP}$ $\checkmark$

Tétel. *Az RH nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{RH} \in \mathrm{NP}$ $\checkmark$
X3C $\prec$ RH

Speciális eset $\Longrightarrow$
Partíció feladat: ahol a $\boldsymbol{b = \frac{1}{2}\sum s_i}$

$$\textit{Partíció} = \left\{ (\boldsymbol{s_1, \ldots, s_m}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{s_i > 0} \text{ egészek, és van olyan} \\ \boldsymbol{I \subseteq \{1, \ldots, m\}}, \text{ hogy } \boldsymbol{\sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} s_i} \end{array} \right\}.$$

Tétel. *Az RH nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{RH} \in \mathrm{NP}$ $\checkmark$
X3C $\prec$ RH

Speciális eset $\Longrightarrow$
Partíció feladat: ahol a $\boldsymbol{b = \frac{1}{2}\sum s_i}$

$$\text{\textit{Partíció}} = \left\{ (\boldsymbol{s_1, \ldots, s_m}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{s_i > 0} \text{ egészek, és van olyan} \\ \boldsymbol{I \subseteq \{1, \ldots, m\}}, \text{ hogy } \boldsymbol{\sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} s_i} \end{array} \right\}.$$

Tétel. *A Partíció nyelv* NP*-teljes.*

Tétel. *Az RH nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{RH} \in \mathrm{NP}$ $\checkmark$
X3C $\prec$ RH

Speciális eset $\Longrightarrow$
Partíció feladat: ahol a $b = \frac{1}{2}\sum s_i$

$$\textit{Partíció} = \left\{ (s_1, \ldots, s_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} s_i > 0 \text{ egészek, és van olyan} \\ I \subseteq \{1, \ldots, m\}, \text{ hogy } \sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} s_i \end{array} \right\}.$$

Tétel. *A Partíció nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: *Partíció* $\in \mathrm{NP}$ $\checkmark$

Tétel. *Az RH nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{RH} \in \mathrm{NP}$ $\surd$
X3C $\prec$ RH

Speciális eset $\Longrightarrow$
Partíció feladat: ahol a $\boldsymbol{b = \frac{1}{2}\sum s_i}$

$$\textit{Partíció} = \left\{ (\boldsymbol{s_1, \ldots, s_m}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{s_i > 0} \text{ egészek, és van olyan} \\ \boldsymbol{I \subseteq \{1, \ldots, m\}}, \text{ hogy } \boldsymbol{\sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} s_i} \end{array} \right\}.$$

Tétel. *A Partíció nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: *Partíció* $\in \mathrm{NP}$ $\surd$
Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció* RH általánosabb!

Tétel. *Az RH nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{RH} \in \mathrm{NP}$ $\checkmark$
X3C $\prec$ RH

Speciális eset $\Longrightarrow$
Partíció feladat: ahol a $b = \frac{1}{2}\sum s_i$

$$\textit{Partíció} = \left\{ (s_1, \ldots, s_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} s_i > 0 \text{ egészek, és van olyan} \\ I \subseteq \{1, \ldots, m\}, \text{ hogy } \sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} s_i \end{array} \right\}.$$

Tétel. *A Partíció nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: *Partíció* $\in \mathrm{NP}$ $\checkmark$
Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció* RH általánosabb!
Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.

Tétel. *Az RH nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{RH} \in \mathrm{NP}$ $\surd$
X3C $\prec$ RH

Speciális eset $\Longrightarrow$
Partíció feladat: ahol a $b = \frac{1}{2}\sum s_i$

$$\textit{Partíció} = \left\{ (s_1, \ldots, s_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} s_i > 0 \text{ egészek, és van olyan} \\ I \subseteq \{1, \ldots, m\}, \text{ hogy } \sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} s_i \end{array} \right\}.$$

Tétel. *A Partíció nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: *Partíció* $\in \mathrm{NP}$ $\surd$
Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció* RH általánosabb!
Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.
$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.

Tétel. *Az RH nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{RH} \in \mathrm{NP}$ $\surd$
X3C $\prec$ RH

Speciális eset $\Longrightarrow$
Partíció feladat: ahol a $b = \frac{1}{2} \sum s_i$

$$\textit{Partíció} = \left\{ (s_1, \ldots, s_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} s_i > 0 \text{ egészek, és van olyan} \\ I \subseteq \{1, \ldots, m\}, \text{ hogy } \sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} s_i \end{array} \right\}.$$

Tétel. *A Partíció nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: *Partíció* $\in \mathrm{NP}$ $\surd$
Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció* RH általánosabb!
Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.
$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.
$x \longrightarrow$ *Partíció* inputját: $(s_1, \ldots, s_m, s + 1 - b, b + 1)$.

Tétel. *Az RH nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: $\boldsymbol{RH} \in \mathrm{NP}$ $\checkmark$
X3C $\prec$ RH

Speciális eset $\Longrightarrow$
Partíció feladat: ahol a $b = \frac{1}{2}\sum s_i$

$$\textit{Partíció} = \left\{ (s_1, \ldots, s_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} s_i > 0 \text{ egészek, és van olyan} \\ I \subseteq \{1, \ldots, m\}, \text{ hogy } \sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} s_i \end{array} \right\}.$$

Tétel. *A Partíció nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás: *Partíció* $\in \mathrm{NP}$ $\checkmark$
Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció* RH általánosabb!
Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.
$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \le s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.
$x \longrightarrow$ *Partíció* inputját: $(s_1, \ldots, s_m, s+1-b, b+1)$.
A számok összege $2s+2$, az utolsó két szám nem lehet egy partíció ugyanazon osztályában, mert az összegük túl nagy: $s+2 > \frac{1}{2}(2s+2)$.