Algoritmuselmélet 11. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu

2002 Március 26.

Kruskal módszere

Mindig a legkisebb súlyú olyan élet színezzük kékre, ami még nem alkot kört az eddigi kék élekkel.

Kruskal módszere

Mindig a legkisebb súlyú olyan élet színezzük kékre, ami még nem alkot kört az eddigi kék élekkel.

$\Longrightarrow$ A kék élek végig egy erdőt határoznak meg, akkor van kész, ha feszítőfa lesz.

Kruskal módszere

Mindig a legkisebb súlyú olyan élet színezzük kékre, ami még nem alkot kört az eddigi kék élekkel.

$\Longrightarrow$ A kék élek végig egy erdőt határoznak meg, akkor van kész, ha feszítőfa lesz.

$\Longrightarrow$ Az új kék él az eddigi erdő két komponensét fogja összekötni.

Kruskal módszere

Mindig a legkisebb súlyú olyan élet színezzük kékre, ami még nem alkot kört az eddigi kék élekkel.

$\Longrightarrow$ A kék élek végig egy erdőt határoznak meg, akkor van kész, ha feszítőfa lesz.

$\Longrightarrow$ Az új kék él az eddigi erdő két komponensét fogja összekötni.

Kezdetben n komponens, egy él színezésével eggyel csökken a komponensek száma.

Kruskal módszere

Mindig a legkisebb súlyú olyan élet színezzük kékre, ami még nem alkot kört az eddigi kék élekkel.

$\Longrightarrow$ A kék élek végig egy erdőt határoznak meg, akkor van kész, ha feszítőfa lesz.

$\Longrightarrow$ Az új kék él az eddigi erdő két komponensét fogja összekötni.

Kezdetben n komponens, egy él színezésével eggyel csökken a komponensek száma.

procedure Kruskal (G: gráf; **var** F, H: élek halmaza);
begin
    $F := \emptyset$; $H := E$;
    while $H \neq \emptyset$ **do begin**
        Töröljük a H minimális súlyú (v, w) élét.
        Ha $F \cup \{(v, w)\}$-ben nincs kör
        (azaz a v, w pontok különböző kék fákban vannak), akkor
            $F := F \cup \{(v, w)\}$
    end
end

Kruskal módszere

Mindig a legkisebb súlyú olyan élet színezzük kékre, ami még nem alkot kört az eddigi kék élekkel.

$\Longrightarrow$ A kék élek végig egy erdőt határoznak meg, akkor van kész, ha feszítőfa lesz.

$\Longrightarrow$ Az új kék él az eddigi erdő két komponensét fogja összekötni.

Kezdetben n komponens, egy él színezésével eggyel csökken a komponensek száma.

procedure Kruskal (G: gráf; **var** F, H: élek halmaza);
begin
  $F := \emptyset$; $H := E$;
  while $H \neq \emptyset$ **do begin**
    Töröljük a H minimális súlyú (v, w) élét.
    Ha $F \cup \{(v, w)\}$-ben nincs kör
    (azaz a v, w pontok különböző kék fákban vannak), akkor
      $F := F \cup \{(v, w)\}$
  end
end

$\Longrightarrow$ Ha a (v, w) él kört eredményez, akkor piros él, ha pedig nem, akkor kék éle.

Tétel. *A Kruskal-algoritmus eredményeként végül F a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának éleit tartalmazza.*

Bizonyítás: ez is piros-kék algoritmus

Tétel. *A Kruskal-algoritmus eredményeként végül F a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának éleit tartalmazza.*

Bizonyítás: ez is piros-kék algoritmus

JAVA animáció: Kruskal

Tétel. *A Kruskal-algoritmus eredményeként végül F a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának éleit tartalmazza.*

Bizonyítás: ez is piros-kék algoritmus

JAVA animáció: Kruskal

Implementáció:

- élekből kupacot építünk $\longrightarrow$ $O(e \log e)$ lépés

Tétel. *A Kruskal-algoritmus eredményeként végül F a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának éleit tartalmazza.*

Bizonyítás: ez is piros-kék algoritmus

JAVA animáció: Kruskal

Implementáció:

- élekből kupacot építünk $\longrightarrow O(e \log e)$ lépés
- éleket előre rendezzük $\longrightarrow O(e \log e)$ lépés

Tétel. *A Kruskal-algoritmus eredményeként végül F a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának éleit tartalmazza.*

Bizonyítás: ez is piros-kék algoritmus

JAVA animáció: Kruskal

Implementáció:

- élekből kupacot építünk $\longrightarrow O(e \log e)$ lépés
- éleket előre rendezzük $\longrightarrow O(e \log e)$ lépés

Hogyan döntjük el, hogy a kiválasztott él kört alkot-e az eddigi kiválasztottakkal?

Tétel. *A Kruskal-algoritmus eredményeként végül F a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának éleit tartalmazza.*

Bizonyítás: ez is piros-kék algoritmus

JAVA animáció: Kruskal

Implementáció:

- élekből kupacot építünk $\longrightarrow O(e \log e)$ lépés
- éleket előre rendezzük $\longrightarrow O(e \log e)$ lépés

Hogyan döntjük el, hogy a kiválasztott él kört alkot-e az eddigi kiválasztottakkal?

$\Longrightarrow$ Tartsuk nyilván az aktuálisan egy kék fába tartozó csúcsokat mint halmazokat.

Tétel. *A Kruskal-algoritmus eredményeként végül F a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának éleit tartalmazza.*

Bizonyítás: ez is piros-kék algoritmus

JAVA animáció: Kruskal

Implementáció:

- élekből kupacot építünk $\longrightarrow O(e \log e)$ lépés
- éleket előre rendezzük $\longrightarrow O(e \log e)$ lépés

Hogyan döntjük el, hogy a kiválasztott él kört alkot-e az eddigi kiválasztottakkal?

$\Longrightarrow$ Tartsuk nyilván az aktuálisan egy kék fába tartozó csúcsokat mint halmazokat.
Kell: UNIÓ, HOLVAN

Az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet

Legyen adott egy véges S halmaz. Ennek egy partícióját szeretnénk tárolni $\rightarrow U_1, \ldots, U_k \subseteq S$

Az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet

Legyen adott egy véges S halmaz. Ennek egy partícióját szeretnénk tárolni $\rightarrow U_1, \ldots, U_k \subseteq S$

Adott egy n elemű S halmaz, és ennek bizonyos $U_1, \ldots, U_m$ részhalmazai, melyekre $U_i \cap U_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ és $U_1 \cup \ldots \cup U_m = S$ (vagyis az U_j részhalmazok S egy partícióját adják).

Az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet

Legyen adott egy véges S halmaz. Ennek egy partícióját szeretnénk tárolni $\rightarrow U_1, \ldots, U_k \subseteq S$

Adott egy n elemű S halmaz, és ennek bizonyos $U_1, \ldots, U_m$ részhalmazai, melyekre $U_i \cap U_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ és $U_1 \cup \ldots \cup U_m = S$ (vagyis az U_j részhalmazok S egy partícióját adják).

Műveletek:

Az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet

Legyen adott egy véges S halmaz. Ennek egy partícióját szeretnénk tárolni $\rightarrow U_1, \ldots, U_k \subseteq S$

Adott egy n elemű S halmaz, és ennek bizonyos $U_1, \ldots, U_m$ részhalmazai, melyekre $U_i \cap U_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ és $U_1 \cup \ldots \cup U_m = S$ (vagyis az U_j részhalmazok S egy partícióját adják).

Műveletek:

UNIÓ(U_i, U_j) $= (\{U_1, \ldots, U_m\} \cup \{U_i \cup U_j\}) \setminus \{U_i, U_j\}$ (az U_i, U_j halmazokat $U_i \cup U_j$ helyettesíti).

Az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet

Legyen adott egy véges S halmaz. Ennek egy partícióját szeretnénk tárolni $\rightarrow U_1, \ldots, U_k \subseteq S$

Adott egy n elemű S halmaz, és ennek bizonyos $U_1, \ldots, U_m$ részhalmazai, melyekre $U_i \cap U_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ és $U_1 \cup \ldots \cup U_m = S$ (vagyis az U_j részhalmazok S egy partícióját adják).

Műveletek:

UNIÓ(U_i, U_j) $= (\{U_1, \ldots, U_m\} \cup \{U_i \cup U_j\}) \setminus \{U_i, U_j\}$ (az U_i, U_j halmazokat $U_i \cup U_j$ helyettesíti).

HOLVAN(v) eredménye (itt $v \in S$) annak az U_i halmaznak a neve, amelynek v eleme.

Az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet

Legyen adott egy véges S halmaz. Ennek egy partícióját szeretnénk tárolni $\rightarrow U_1, \ldots, U_k \subseteq S$

Adott egy n elemű S halmaz, és ennek bizonyos $U_1, \ldots, U_m$ részhalmazai, melyekre $U_i \cap U_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ és $U_1 \cup \ldots \cup U_m = S$ (vagyis az U_j részhalmazok S egy partícióját adják).

Műveletek:

UNIÓ(U_i, U_j) $= (\{U_1, \ldots, U_m\} \cup \{U_i \cup U_j\}) \setminus \{U_i, U_j\}$ (az U_i, U_j halmazokat $U_i \cup U_j$ helyettesíti).

HOLVAN(v) eredménye (itt $v \in S$) annak az U_i halmaznak a neve, amelynek v eleme.

Kruskalban:

annak megvizsgálása, hogy milyen színű legyen az új (u, v) él

$\Longrightarrow$ Ha HOLVAN$(u) \neq$ HOLVAN(v), akkor kék, különben piros.

Az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet

Legyen adott egy véges S halmaz. Ennek egy partícióját szeretnénk tárolni $\rightarrow U_1, \ldots, U_k \subseteq S$

Adott egy n elemű S halmaz, és ennek bizonyos $U_1, \ldots, U_m$ részhalmazai, melyekre $U_i \cap U_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ és $U_1 \cup \ldots \cup U_m = S$ (vagyis az U_j részhalmazok S egy partícióját adják).
Műveletek:
UNIÓ(U_i, U_j) $= (\{U_1, \ldots, U_m\} \cup \{U_i \cup U_j\}) \setminus \{U_i, U_j\}$ (az U_i, U_j halmazokat $U_i \cup U_j$ helyettesíti).
HOLVAN(v) eredménye (itt $v \in S$) annak az U_i halmaznak a neve, amelynek v eleme.

Kruskalban:

annak megvizsgálása, hogy milyen színű legyen az új (u, v) él
$\Longrightarrow$ Ha HOLVAN$(u) \neq$ HOLVAN(v), akkor kék, különben piros.

Új él színezése $\Longrightarrow$ UNIÓ(HOLVAN(u), HOLVAN(v))

Implementáció fákkal

$U_j \longrightarrow$ gyökeres, felfelé irányított fa

Implementáció fákkal

$U_j \longrightarrow$ gyökeres, felfelé irányított fa
U_j elemeit a fa csúcsaiban tároljuk, egy szülőmutatóval.

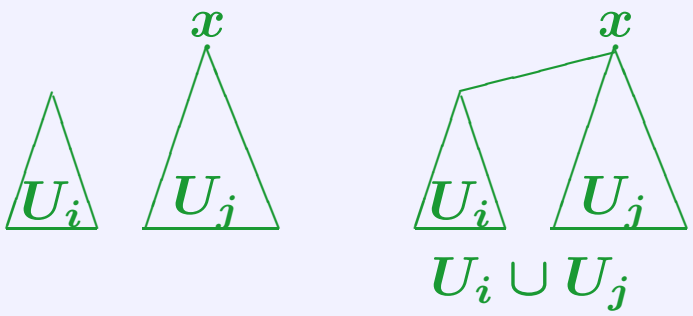
Implementáció fákkal

$U_j \longrightarrow$ gyökeres, felfelé irányított fa
U_j elemeit a fa csúcsaiban tároljuk, egy szülőmutatóval.
Egy részhalmaz *neve* legyen az őt ábrázoló fa gyökere. A gyökérben nyilvántartjuk még a fa méretét is.

Implementáció fákkal

$U_j \longrightarrow$ gyökeres, felfelé irányított fa
U_j elemeit a fa csúcsaiban tároljuk, egy szülőmutatóval.
Egy részhalmaz *neve* legyen az őt ábrázoló fa gyökere. A gyökérben nyilvántartjuk még a fa méretét is.

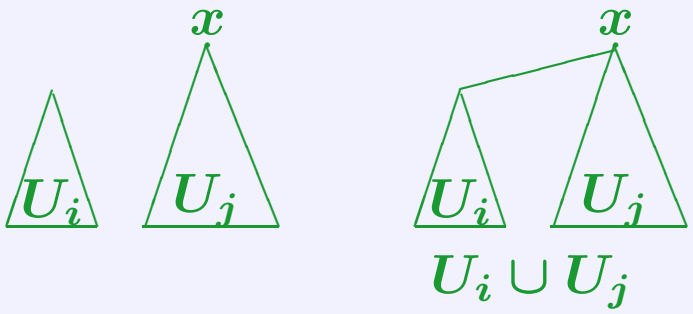
- **UNIÓ:** $U_i \cup U_j$ fáját a következőképpen készítjük el:
  Tegyük fel, hogy $|U_i| \leq |U_j|$. Ekkor az U_j fa x gyökeréhez gyermekként hozzákapcsoljuk U_i gyökerét.

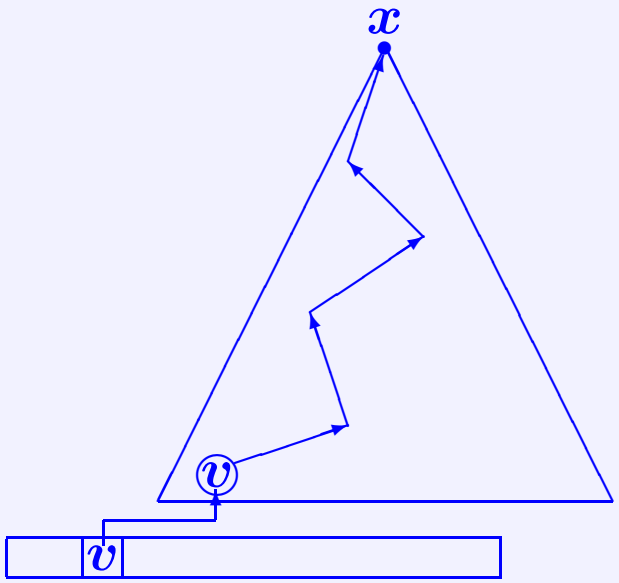


Implementáció fákkal

$U_j \longrightarrow$ gyökeres, felfelé irányított fa
U_j elemeit a fa csúcsaiban tároljuk, egy szülőmutatóval.
Egy részhalmaz *neve* legyen az őt ábrázoló fa gyökere. A gyökérben nyilvántartjuk még a fa méretét is.

- **UNIÓ:** $U_i \cup U_j$ fáját a következőképpen készítjük el:
  Tegyük fel, hogy $|U_i| \leq |U_j|$. Ekkor az U_j fa x gyökeréhez gyermekként hozzákapcsoljuk U_i gyökerét.





- **HOLVAN:** A $v \in S$ elemet tartalmazó részhalmaz nevét, azaz a megfelelő fa gyökerét a szülőkhöz menő mutatók végigkövetésével találhatjuk meg.

Az UNIÓ hívásakor az U_i és U_j halmazok a gyökerükkel adottak
$\Longrightarrow$ költség: $O(1)$

Az UNIÓ hívásakor az U_i és U_j halmazok a gyökerükkel adottak
$\Longrightarrow$ költség: $O(1)$
HA egy v csúcs új gyökér alá kerül, akkor egy szinttel lesz távolabb a gyökértől, míg az új fájának a mérete legalább az eredeti duplájára változik.

Az UNIÓ hívásakor az U_i és U_j halmazok a gyökerükkel adottak
$\Longrightarrow$ költség: $O(1)$
HA egy v csúcs új gyökér alá kerül, akkor egy szinttel lesz távolabb a gyökértől, míg az új fájának a mérete legalább az eredeti duplájára változik.
$\Longrightarrow$ Egy csúcs legfeljebb $\log_2 n$-szer kerülhet új gyökér alá

Az UNIÓ hívásakor az U_i és U_j halmazok a gyökerükkel adottak
$\Longrightarrow$ költség: $O(1)$
HA egy v csúcs új gyökér alá kerül, akkor egy szinttel lesz távolabb a gyökértől, míg az új fájának a mérete legalább az eredeti duplájára változik.
$\Longrightarrow$ Egy csúcs legfeljebb $\log_2 n$-szer kerülhet új gyökér alá
$\Longrightarrow$ szintszám $\leq \log_2 n$

Az UNIÓ hívásakor az U_i és U_j halmazok a gyökerükkel adottak
$\Longrightarrow$ költség: $O(1)$
HA egy v csúcs új gyökér alá kerül, akkor egy szinttel lesz távolabb a gyökértől, míg az új fájának a mérete legalább az eredeti duplájára változik.
$\Longrightarrow$ Egy csúcs legfeljebb $\log_2 n$-szer kerülhet új gyökér alá
$\Longrightarrow$ szintszám $\leq \log_2 n$
$\Longrightarrow$ HOLVAN költsége $O(\log n)$

Az UNIÓ hívásakor az U_i és U_j halmazok a gyökerükkel adottak
$\Longrightarrow$ költség: $O(1)$
HA egy v csúcs új gyökér alá kerül, akkor egy szinttel lesz távolabb a gyökértől, míg az új fájának a mérete legalább az eredeti duplájára változik.
$\Longrightarrow$ Egy csúcs legfeljebb $\log_2 n$-szer kerülhet új gyökér alá
$\Longrightarrow$ szintszám $\leq \log_2 n$
$\Longrightarrow$ HOLVAN költsége $O(\log n)$

Tétel. *A Kruskal-algoritmus költsége $O(e \log e)$.* □

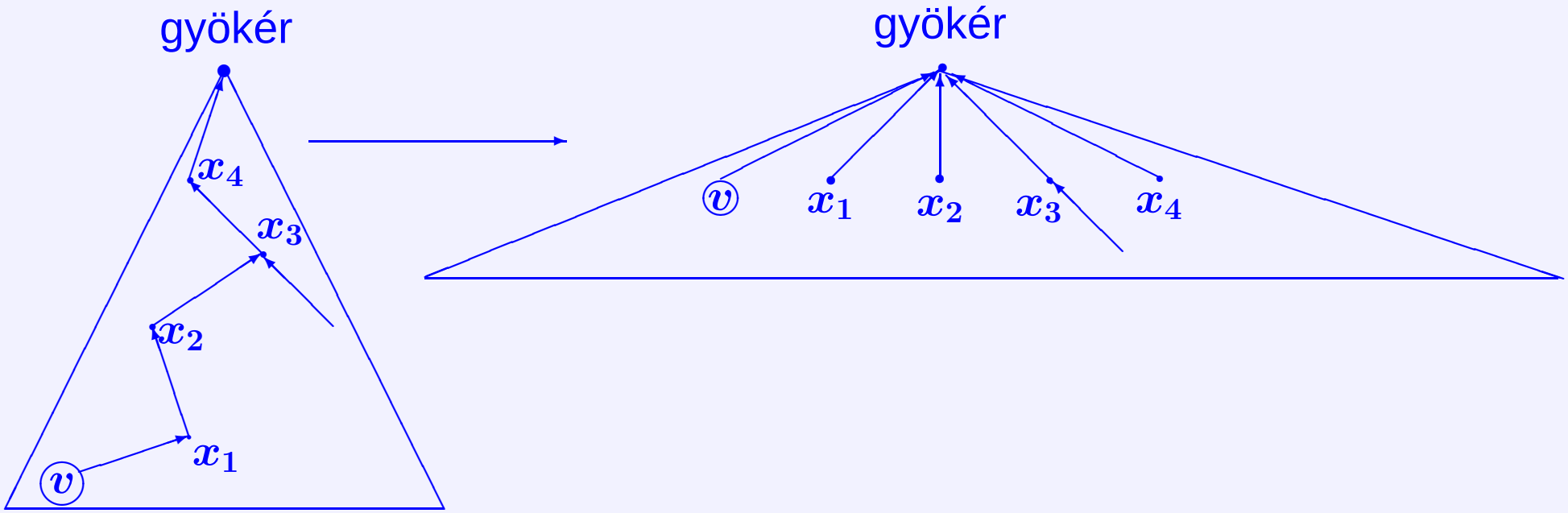
Bizonyítás: $2e$ HOLVAN, és $n-1$ UNIÓ műveletet jelent. Ezek időigénye $O(e \log n + n) = O(e \log n)$, vagy ami ugyanaz: $O(e \log e)$.

A HOLVAN gyorsítása: útösszenyomás

Egy pontról többször is megnézzük HOLVAN, mindig $\log n$ lépés

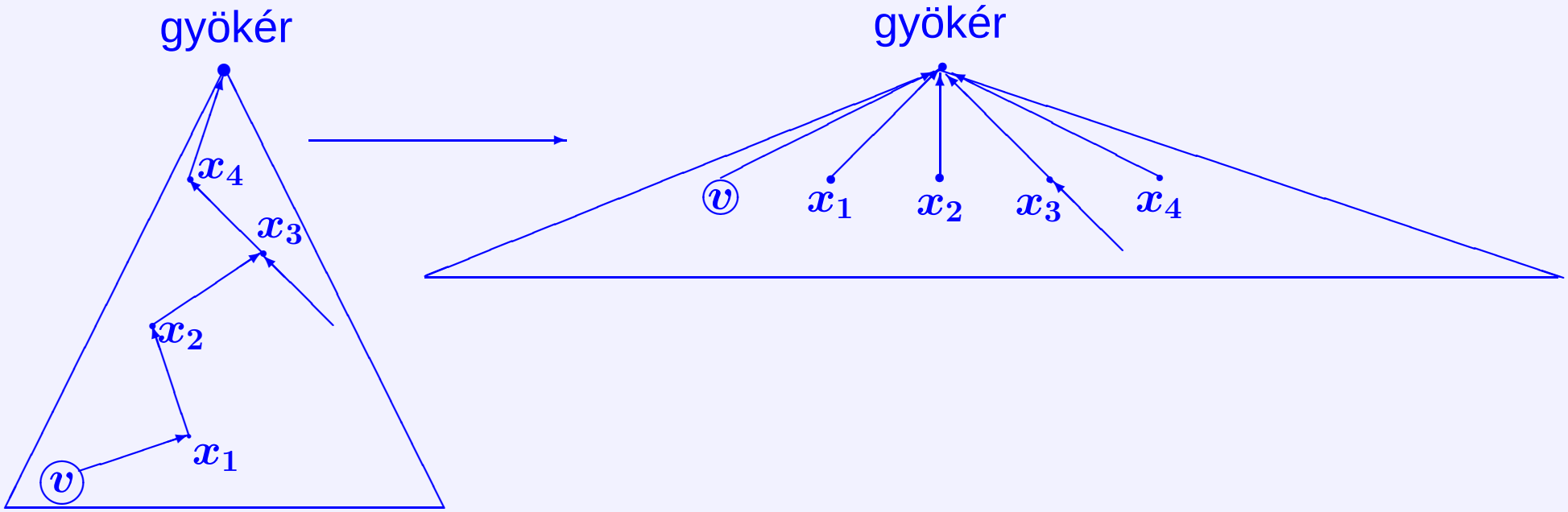
A HOLVAN gyorsítása: útösszenyomás

Egy pontról többször is megnézzük HOLVAN, mindig $\log n$ lépés
$\Longrightarrow$ Az első alkalommal, minden ősét kössük közvetlenül a gyökérbe



A HOLVAN gyorsítása: útösszenyomás

Egy pontról többször is megnézzük HOLVAN, mindig $\log n$ lépés
$\Longrightarrow$ Az első alkalommal, minden ősét kössük közvetlenül a gyökérbe



Tétel. *Legyen $|S| = n$, és tegyük fel, hogy kezdetben mindegyik U_j egyelemű. Ha egy olyan utasítássorozatot hajtunk végre (útösszenyomással), melyben $n-1$ UNIÓ és $m \geq n-1$ HOLVAN szerepel, akkor ennek az időigénye $O(m\alpha(m))$.*

A korlátban szereplő $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény az *inverz Ackermann-függvény*.

A korlátban szereplő $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény az *inverz Ackermann-függvény*.

$\alpha(m)$ a végtelenhez tart, ha $m \to \infty$, de nagyon lassan, lassabban mint a logaritmus k-szori önmagába helyettesítésével adódó $\log \log \cdots \log m$ függvény ($k \in \mathbb{Z}^+$ tetszőleges).

Pl. $\alpha(m) \leq 4$, ha $m < 2^{65536}$
A normális méretű feladatoknál tehát $\alpha(m)$ állandónak (≤ 4) tekinthető.

A korlátban szereplő $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény az *inverz Ackermann-függvény*.

$\alpha(m)$ a végtelenhez tart, ha $m \to \infty$, de nagyon lassan, lassabban mint a logaritmus k-szori önmagába helyettesítésével adódó $\log \log \cdots \log m$ függvény ($k \in \mathbb{Z}^+$ tetszőleges).

Pl. $\alpha(m) \leq 4$, ha $m < 2^{65536}$
A normális méretű feladatoknál tehát $\alpha(m)$ állandónak (≤ 4) tekinthető.
Tétel. *Ha az élek rendezésével kapcsolatos teendők $O(e)$ időben megoldhatók, akkor a Kruskal-algoritmus $O(e\alpha(e))$ időben megvalósítható.*

A korlátban szereplő $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény az *inverz Ackermann-függvény*.

$\alpha(m)$ a végtelenhez tart, ha $m \to \infty$, de nagyon lassan, lassabban mint a logaritmus k-szori önmagába helyettesítésével adódó $\log \log \cdots \log m$ függvény ($k \in \mathbb{Z}^+$ tetszőleges).

Pl. $\alpha(m) \leq 4$, ha $m < 2^{65536}$
A normális méretű feladatoknál tehát $\alpha(m)$ állandónak (≤ 4) tekinthető.
Tétel. *Ha az élek rendezésével kapcsolatos teendők $O(e)$ időben megoldhatók, akkor a Kruskal-algoritmus $O(e\alpha(e))$ időben megvalósítható.*

Manipuláció a súlyokkal $\Longrightarrow$ Yao (1975): $O(e \log \log n)$

A korlátban szereplő $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény az *inverz Ackermann-függvény*.

$\alpha(m)$ a végtelenhez tart, ha $m \to \infty$, de nagyon lassan, lassabban mint a logaritmus k-szori önmagába helyettesítésével adódó $\log \log \cdots \log m$ függvény ($k \in \mathbb{Z}^+$ tetszőleges).

Pl. $\alpha(m) \leq 4$, ha $m < 2^{65536}$
A normális méretű feladatoknál tehát $\alpha(m)$ állandónak (≤ 4) tekinthető.
Tétel. *Ha az élek rendezésével kapcsolatos teendők $O(e)$ időben megoldhatók, akkor a Kruskal-algoritmus $O(e\alpha(e))$ időben megvalósítható.*

Manipuláció a súlyokkal $\Longrightarrow$ Yao (1975): $O(e \log \log n)$
Véletlen módszerek $\Longrightarrow$ D. R. Karger, P. N. Klein, R. E. Tarjan, (1994): várhatóan $O(e)$

A korlátban szereplő $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény az *inverz Ackermann-függvény*.

$\alpha(m)$ a végtelenhez tart, ha $m \to \infty$, de nagyon lassan, lassabban mint a logaritmus k-szori önmagába helyettesítésével adódó $\log \log \cdots \log m$ függvény ($k \in \mathbb{Z}^+$ tetszőleges).

Pl. $\alpha(m) \leq 4$, ha $m < 2^{65536}$
A normális méretű feladatoknál tehát $\alpha(m)$ állandónak (≤ 4) tekinthető.
Tétel. *Ha az élek rendezésével kapcsolatos teendők $O(e)$ időben megoldhatók, akkor a Kruskal-algoritmus $O(e\alpha(e))$ időben megvalósítható.*

Manipuláció a súlyokkal $\Longrightarrow$ Yao (1975): $O(e \log \log n)$
Véletlen módszerek $\Longrightarrow$ D. R. Karger, P. N. Klein, R. E. Tarjan, (1994): várhatóan $O(e)$

On-line változatban is működik a piros-kék algoritmus: színezzük az új élet élet kékre; ha emiatt kialakul egy kék kör, akkor abból töröljünk egy maximális súlyú élet.

A korlátban szereplő $\alpha : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ függvény az *inverz Ackermann-függvény*.

$\alpha(m)$ a végtelenhez tart, ha $m \to \infty$, de nagyon lassan, lassabban mint a logaritmus k-szori önmagába helyettesítésével adódó $\log \log \cdots \log m$ függvény ($k \in \mathbb{Z}^+$ tetszőleges).

Pl. $\alpha(m) \leq 4$, ha $m < 2^{65536}$
A normális méretű feladatoknál tehát $\alpha(m)$ állandónak (≤ 4) tekinthető.
Tétel. *Ha az élek rendezésével kapcsolatos teendők $O(e)$ időben megoldhatók, akkor a Kruskal-algoritmus $O(e\alpha(e))$ időben megvalósítható.*

Manipuláció a súlyokkal $\Longrightarrow$ Yao (1975): $O(e \log \log n)$
Véletlen módszerek $\Longrightarrow$ D. R. Karger, P. N. Klein, R. E. Tarjan, (1994): várhatóan $O(e)$

On-line változatban is működik a piros-kék algoritmus: színezzük az új élet élet kékre; ha emiatt kialakul egy kék kör, akkor abból töröljünk egy maximális súlyú élet.

JAVA animáció: Kruskal

Maximális párosítás páros gráfokban

Definíció. *A $G = (V, E)$ gráfot* párosnak *nevezzük, ha V csúcshalmaza felosztható két diszjunkt részre – V_1-re és V_2-re – úgy, hogy minden él ezen két halmaz között fut, vagyis $(x, y) \in E$ esetén $x \in V_1$ és $y \in V_2$ vagy fordítva.*

Maximális párosítás páros gráfokban

Definíció. *A $G = (V, E)$ gráfot* párosnak *nevezzük, ha V csúcshalmaza felosztható két diszjunkt részre – V_1-re és V_2-re – úgy, hogy minden él ezen két halmaz között fut, vagyis $(x, y) \in E$ esetén $x \in V_1$ és $y \in V_2$ vagy fordítva.*

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Az E élhalmaz $E' \subseteq E$ részhalmaza G egy* párosítása*, ha a $G' = (V, E')$ gráfban minden pont foka legfeljebb egy.*

Maximális párosítás páros gráfokban

Definíció. *A $G = (V, E)$ gráfot* párosnak *nevezzük, ha V csúcshalmaza felosztható két diszjunkt részre – V_1-re és V_2-re – úgy, hogy minden él ezen két halmaz között fut, vagyis $(x, y) \in E$ esetén $x \in V_1$ és $y \in V_2$ vagy fordítva.*

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Az E élhalmaz $E' \subseteq E$ részhalmaza G egy* párosítása*, ha a $G' = (V, E')$ gráfban minden pont foka legfeljebb egy.*

Definíció. *A G gráf egy E' párosítása* maximális*, ha G minden E'' párosítására $|E''| \leq |E'|$.*

Maximális párosítás páros gráfokban

Definíció. *A $G = (V, E)$ gráfot* párosnak *nevezzük, ha V csúcshalmaza felosztható két diszjunkt részre – V_1-re és V_2-re – úgy, hogy minden él ezen két halmaz között fut, vagyis $(x, y) \in E$ esetén $x \in V_1$ és $y \in V_2$ vagy fordítva.*

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Az E élhalmaz $E' \subseteq E$ részhalmaza G egy* párosítása*, ha a $G' = (V, E')$ gráfban minden pont foka legfeljebb egy.*

Definíció. *A G gráf egy E' párosítása* maximális*, ha G minden E'' párosítására $|E''| \leq |E'|$.*

A probléma: Adott egy $G = (V_1, V_2; E)$ páros gráf. Határozzuk meg G egy maximális párosítását.

Maximális párosítás páros gráfokban

Definíció. *A $G = (V, E)$ gráfot* párosnak *nevezzük, ha V csúcshalmaza felosztható két diszjunkt részre – V_1-re és V_2-re – úgy, hogy minden él ezen két halmaz között fut, vagyis $(x, y) \in E$ esetén $x \in V_1$ és $y \in V_2$ vagy fordítva.*

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Az E élhalmaz $E' \subseteq E$ részhalmaza G egy* párosítása*, ha a $G' = (V, E')$ gráfban minden pont foka legfeljebb egy.*

Definíció. *A G gráf egy E' párosítása* maximális*, ha G minden E'' párosítására $|E''| \leq |E'|$.*

A probléma: Adott egy $G = (V_1, V_2; E)$ páros gráf. Határozzuk meg G egy maximális párosítását.

Definíció. *Legyen G egy tetszőleges gráf, és E' a G egy párosítása. Egy G-beli utat E'-*alternáló útnak *hívunk, ha felváltva tartalmaz párosított és nem párosított éleket.*

Maximális párosítás páros gráfokban

Definíció. *A $G = (V, E)$ gráfot* párosnak *nevezzük, ha V csúcshalmaza felosztható két diszjunkt részre – V_1-re és V_2-re – úgy, hogy minden él ezen két halmaz között fut, vagyis $(x, y) \in E$ esetén $x \in V_1$ és $y \in V_2$ vagy fordítva.*

Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Az E élhalmaz $E' \subseteq E$ részhalmaza G egy* párosítása*, ha a $G' = (V, E')$ gráfban minden pont foka legfeljebb egy.*

Definíció. *A G gráf egy E' párosítása* maximális*, ha G minden E'' párosítására $|E''| \leq |E'|$.*

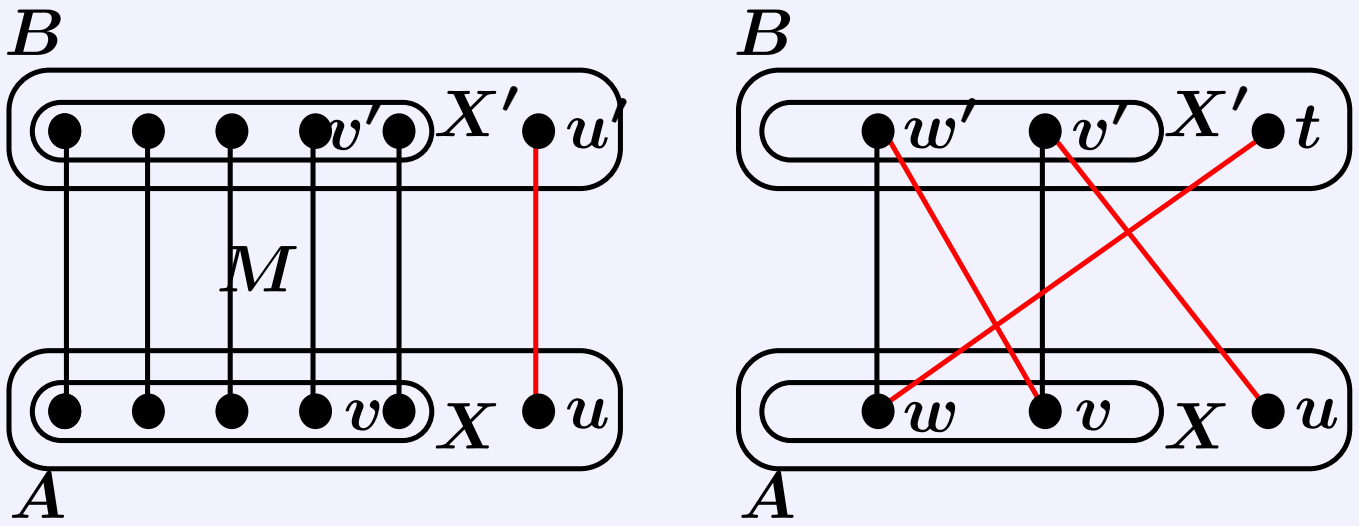
A probléma: Adott egy $G = (V_1, V_2; E)$ páros gráf. Határozzuk meg G egy maximális párosítását.

Definíció. *Legyen G egy tetszőleges gráf, és E' a G egy párosítása. Egy G-beli utat E'-*alternáló útnak *hívunk, ha felváltva tartalmaz párosított és nem párosított éleket.*

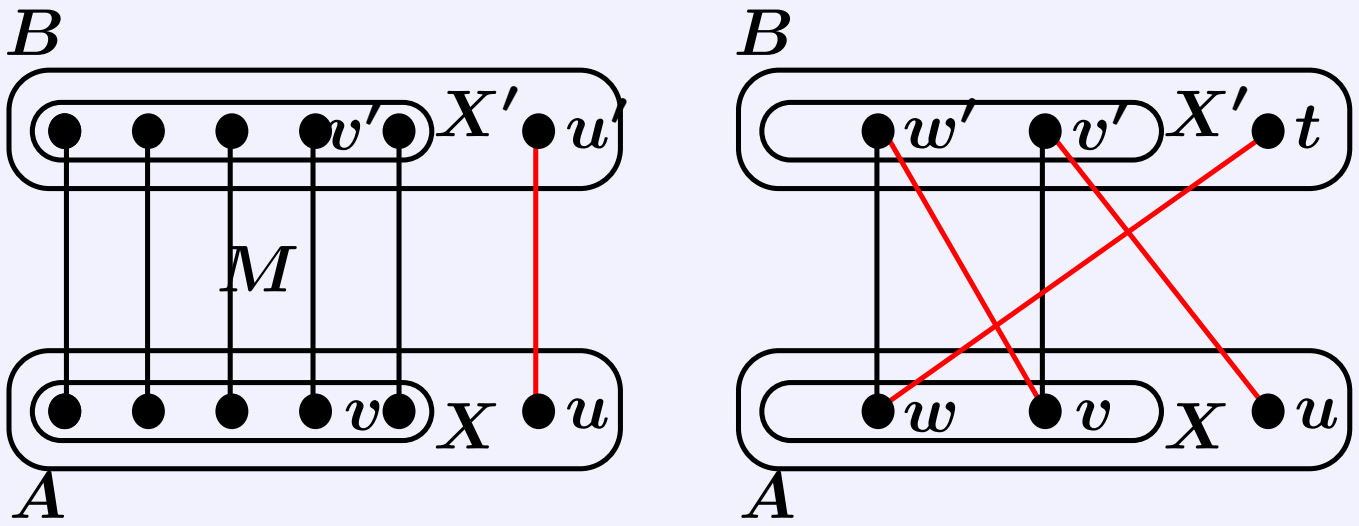
Definíció. *Legyen E' a $G = (V, E)$ gráf egy párosítása. Ekkor egy olyan E'-alternáló út, melynek mindkét végpontja párosítatlan, E'-*re nézve javító út*, vagy röviden E'-*javító út*.*

Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf és E' egy párosítása. Ha E'-re nézve nincs javító út G-ben, akkor E' a G egy maximális párosítása.*

Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf és E' egy párosítása. Ha E'-re nézve nincs javító út G-ben, akkor E' a G egy maximális párosítása.*



Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf és E' egy párosítása. Ha E'-re nézve nincs javító út G-ben, akkor E' a G egy maximális párosítása.*



Hogyan keressünk javító utat?

Javító út keresése alternáló erdő építésével

0. szint: V_1 azon pontjai, melyeket E' nem fed le, vagyis a párosítatlan pontok.

⋮

Javító út keresése alternáló erdő építésével

0. szint: V_1 azon pontjai, melyeket E' nem fed le, vagyis a párosítatlan pontok.

⋮

$2k-1$. szint: V_2 azon még fel nem vett pontjai, melyek egy párosítatlan, azaz egy $E \setminus E'$-beli éllel elérhetők egy $2k-2$. szintbeli pontból; ezen éllel együtt.

Javító út keresése alternáló erdő építésével

0. szint: V_1 azon pontjai, melyeket E' nem fed le, vagyis a párosítatlan pontok.

⋮

$2k-1$. szint: V_2 azon még fel nem vett pontjai, melyek egy párosítatlan, azaz egy $E \setminus E'$-beli éllel elérhetők egy $2k-2$. szintbeli pontból; ezen éllel együtt.

$2k$. szint: V_1 azon még fel nem vett pontjai, melyek egy párosított, azaz egy E'-beli éllel elérhetők egy $2k-1$. szintbeli pontból; ezen éllel együtt.

⋮

Javító út keresése alternáló erdő építésével

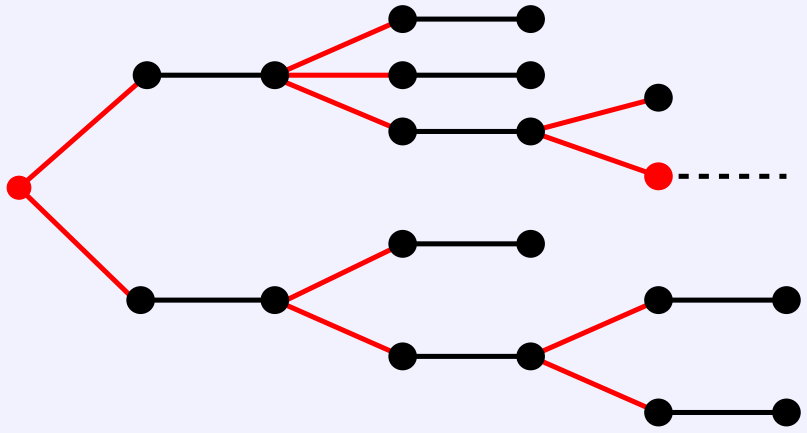
0. szint: V_1 azon pontjai, melyeket E' nem fed le, vagyis a párosítatlan pontok.

⋮

$2k-1$. szint: V_2 azon még fel nem vett pontjai, melyek egy párosítatlan, azaz egy $E \setminus E'$-beli éllel elérhetők egy **$2k-2$.** szintbeli pontból; ezen éllel együtt.

$2k$. szint: V_1 azon még fel nem vett pontjai, melyek egy párosított, azaz egy E'-beli éllel elérhetők egy **$2k-1$.** szintbeli pontból; ezen éllel együtt.

⋮



Tétel. *A $G = (V_1, V_2; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van az E' párosításra nézve javító út, ha az E'-hez tartozó alternáló erdőben valamelyik páratlan szinten megjelenik egy párosítatlan pont.*

Tétel. *A $G = (V_1, V_2; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van az E' párosításra nézve javító út, ha az E'-hez tartozó alternáló erdőben valamelyik páratlan szinten megjelenik egy párosítatlan pont.*

Bizonyítás: Ha találtunk páratlan szinten párosítatlan utat, akkor a gyökér felé vezető út javító út ✓

Tétel. *A $G = (V_1, V_2; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van az E' párosításra nézve javító út, ha az E'-hez tartozó alternáló erdőben valamelyik páratlan szinten megjelenik egy párosítatlan pont.*

Bizonyítás: Ha találtunk páratlan szinten párosítatlan utat, akkor a gyökér felé vezető út javító út $\surd$

Fordítva:
Megmutatjuk, hogy a V_1 párosítatlan csúcsaiból (ezek vannak az erdőben a nulladik szinten) alternáló úton elérhető pontok mindegyikét beválasztjuk valamikor az alternáló erdőbe.

Tétel. *A $G = (V_1, V_2; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van az E' párosításra nézve javító út, ha az E'-hez tartozó alternáló erdőben valamelyik páratlan szinten megjelenik egy párosítatlan pont.*

Bizonyítás: Ha találtunk páratlan szinten párosítatlan utat, akkor a gyökér felé vezető út javító út $\surd$

Fordítva:
Megmutatjuk, hogy a V_1 párosítatlan csúcsaiból (ezek vannak az erdőben a nulladik szinten) alternáló úton elérhető pontok mindegyikét beválasztjuk valamikor az alternáló erdőbe.

Tegyük fel, hogy $v_0, v_1, \ldots, v_k$ egy alternáló út, és $v_0 \in V_1$ egy párosítatlan csúcs; i szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy v_i bekerül az erdőbe.
Ha $i = 0$ $\surd$

Tétel. *A $G = (V_1, V_2; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van az E' párosításra nézve javító út, ha az E'-hez tartozó alternáló erdőben valamelyik páratlan szinten megjelenik egy párosítatlan pont.*

Bizonyítás: Ha találtunk páratlan szinten párosítatlan utat, akkor a gyökér felé vezető út javító út $\surd$

Fordítva:
Megmutatjuk, hogy a V_1 párosítatlan csúcsaiból (ezek vannak az erdőben a nulladik szinten) alternáló úton elérhető pontok mindegyikét beválasztjuk valamikor az alternáló erdőbe.

Tegyük fel, hogy $v_0, v_1, \ldots, v_k$ egy alternáló út, és $v_0 \in V_1$ egy párosítatlan csúcs; i szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy v_i bekerül az erdőbe.
Ha $i = 0$ $\surd$

Az út v_{2j} csúcsa V_1-ben van és a (v_{2j}, v_{2j+1}) él párosítatlan. $\Longrightarrow$ ha v_{2j}-t beválasztottuk, akkor v_{2j+1} is bekerül

Tétel. *A $G = (V_1, V_2; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van az E' párosításra nézve javító út, ha az E'-hez tartozó alternáló erdőben valamelyik páratlan szinten megjelenik egy párosítatlan pont.*

Bizonyítás: Ha találtunk páratlan szinten párosítatlan utat, akkor a gyökér felé vezető út javító út $\surd$

Fordítva:
Megmutatjuk, hogy a V_1 párosítatlan csúcsaiból (ezek vannak az erdőben a nulladik szinten) alternáló úton elérhető pontok mindegyikét beválasztjuk valamikor az alternáló erdőbe.

Tegyük fel, hogy $v_0, v_1, \ldots, v_k$ egy alternáló út, és $v_0 \in V_1$ egy párosítatlan csúcs; i szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy v_i bekerül az erdőbe.
Ha $i = 0$ $\surd$

Az út v_{2j} csúcsa V_1-ben van és a (v_{2j}, v_{2j+1}) él párosítatlan. $\Longrightarrow$ ha v_{2j}-t beválasztottuk, akkor v_{2j+1} is bekerül

Az út v_{2j-1} csúcsa V_2-ben van és $(v_{2j-1}, v_{2j}) \in E'$. Így v_{2j-1} után v_{2j} is sorra kerül, ha korábban ez még nem történt meg.

Tegyük fel, hogy G-ben a v és w csúcsok egy javító út végpontjai.

Tegyük fel, hogy G-ben a v és w csúcsok egy javító út végpontjai.
$v \in V_1$ párosítatlan $\implies w \in V_2$

Tegyük fel, hogy G-ben a v és w csúcsok egy javító út végpontjai.
$v \in V_1$ párosítatlan $\implies w \in V_2$
w elérhető alternáló úton v-ből $\implies$ valamikor beválasztjuk

Tegyük fel, hogy G-ben a v és w csúcsok egy javító út végpontjai.
$v \in V_1$ párosítatlan $\implies w \in V_2$
w elérhető alternáló úton v-ből $\implies$ valamikor beválasztjuk
De V_2-beli csúcsokat csak páratlan szintekre veszünk fel $\implies w$ is itt lesz

Lépésszám: Alternáló erdő építése: $O(e)$, össze lépésszám: $O(ne)$

Tegyük fel, hogy G-ben a v és w csúcsok egy javító út végpontjai.
$v \in V_1$ párosítatlan $\implies w \in V_2$
w elérhető alternáló úton v-ből $\implies$ valamikor beválasztjuk
De V_2-beli csúcsokat csak páratlan szintekre veszünk fel $\implies w$ is itt lesz

Lépésszám: Alternáló erdő építése: $O(e)$, össze lépésszám: $O(ne)$

Karp (1973): $O(e\sqrt{n})$

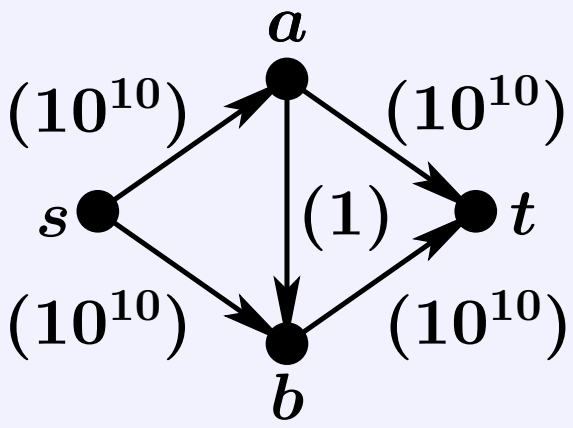
Maximális folyamok hálózatokban

JAVA animáció: Ford-Fulkerson algoritmus

Maximális folyamok hálózatokban

JAVA animáció: Ford-Fulkerson algoritmus

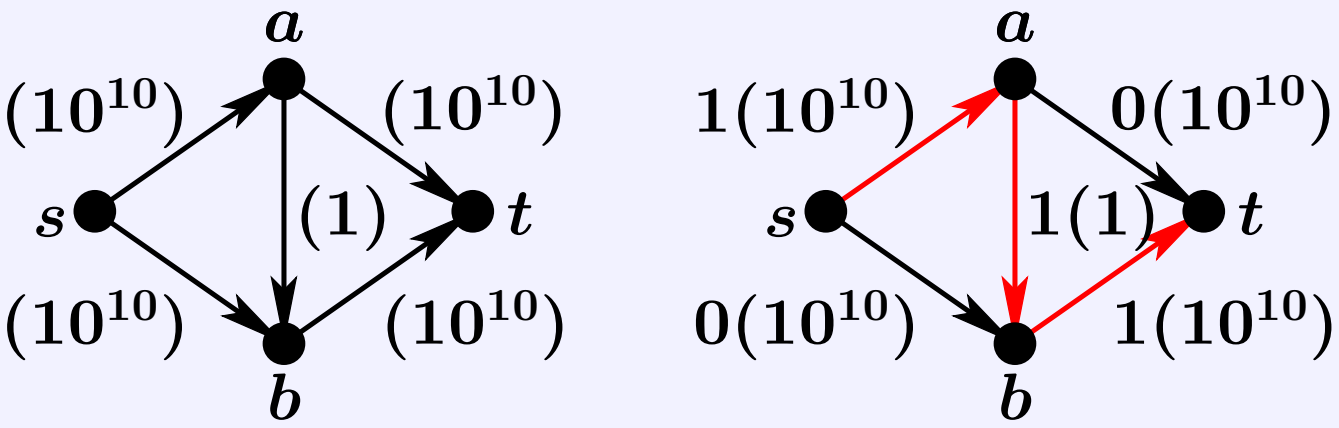
Ha minden kapacitás egész és a maximális folyam értéke f, akkor legfeljebb f javítással megkapjuk a maximális folyamot.



Maximális folyamok hálózatokban

JAVA animáció: Ford-Fulkerson algoritmus

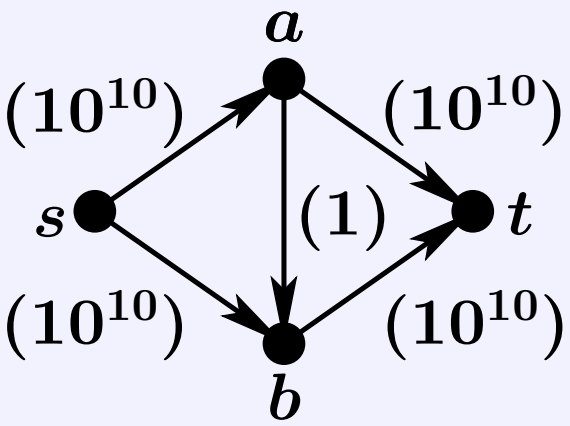
Ha minden kapacitás egész és a maximális folyam értéke f, akkor legfeljebb f javítással megkapjuk a maximális folyamot.

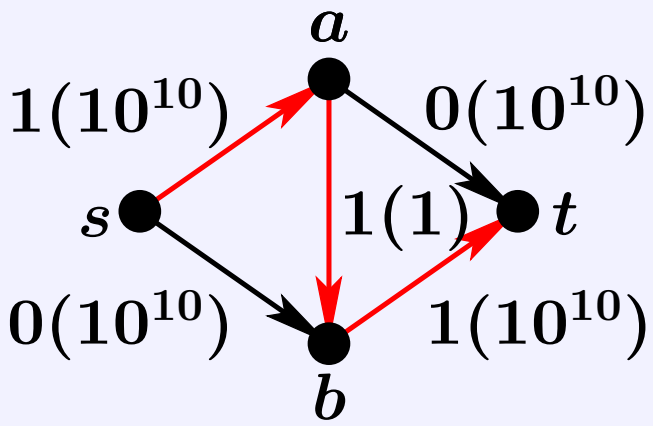


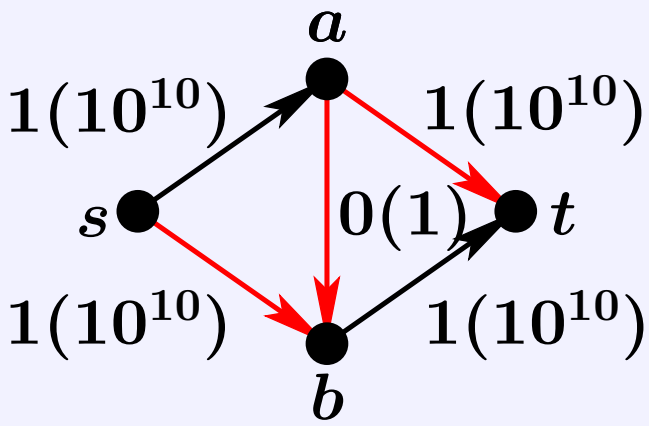
Maximális folyamok hálózatokban

JAVA animáció: Ford-Fulkerson algoritmus

Ha minden kapacitás egész és a maximális folyam értéke f, akkor legfeljebb f javítással megkapjuk a maximális folyamot.





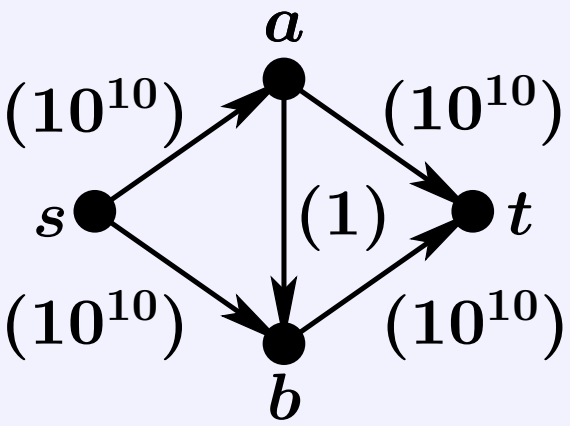


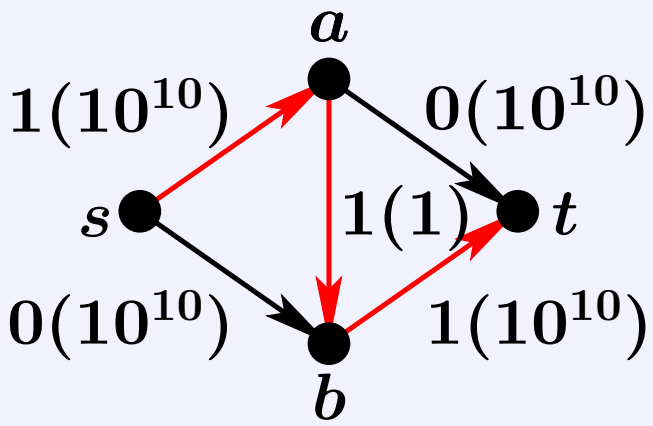
Ha az élkapacitások racionális számok $\Longrightarrow$ véges lépés

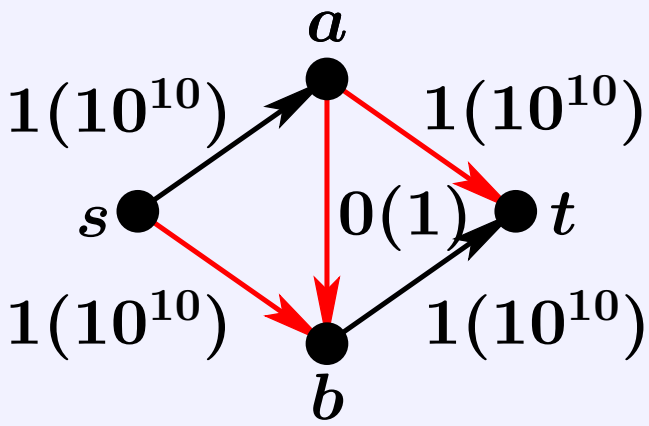
Maximális folyamok hálózatokban

JAVA animáció: Ford-Fulkerson algoritmus

Ha minden kapacitás egész és a maximális folyam értéke f, akkor legfeljebb f javítással megkapjuk a maximális folyamot.







Ha az élkapacitások racionális számok $\Longrightarrow$ véges lépés

Ha irracionális kapacitásokat is megengedünk $\Longrightarrow$ lehet, hogy nem ér véget véges sok lépésben, sőt lehet, hogy nem is jó értékhez konvergál

Edmonds–Karp algoritmus

A folyam növelésére mindig a legrövidebb – vagyis a legkevesebb élből álló – növelő utak egyikét választjuk.

Edmonds–Karp algoritmus

A folyam növelésére mindig a legrövidebb – vagyis a legkevesebb élből álló – növelő utak egyikét válasszuk.

Tekintsük a G_f javító gráfot; legyen benne π egy legrövidebb növelő út. Ennek hosszát (élszámát) jelölje l.

Edmonds–Karp algoritmus

A folyam növelésére mindig a legrövidebb – vagyis a legkevesebb élből álló – növelő utak egyikét válasszuk.

Tekintsük a G_f javító gráfot; legyen benne π egy legrövidebb növelő út.
Ennek hosszát (élszámát) jelölje l.
Szélességi kereséssel osszuk szintekre $\Longrightarrow D[v]$

Edmonds–Karp algoritmus

A folyam növelésére mindig a legrövidebb – vagyis a legkevesebb élből álló – növelő utak egyikét válasszuk.

Tekintsük a G_f javító gráfot; legyen benne π egy legrövidebb növelő út.
Ennek hosszát (élszámát) jelölje l.
Szélességi kereséssel osszuk szintekre $\Longrightarrow D[v]$

(1) Egy él legfeljebb egy réteggel mehet előre.

Edmonds–Karp algoritmus

A folyam növelésére mindig a legrövidebb – vagyis a legkevesebb élből álló – növelő utak egyikét válasszuk.

Tekintsük a G_f javító gráfot; legyen benne π egy legrövidebb növelő út.
Ennek hosszát (élszámát) jelölje l.
Szélességi kereséssel osszuk szintekre $\Longrightarrow D[v]$

(1) Egy él legfeljebb egy réteggel mehet előre.
A G_f egy $x \to y$ élét nevezzük *vastagnak*, ha $D[y] = D[x] + 1$.

(2) Az l hosszúságú $s \rightsquigarrow t$ utak csupa vastag élből állnak, és nincs l-nél rövidebb $s \rightsquigarrow t$ út.

Edmonds–Karp algoritmus

A folyam növelésére mindig a legrövidebb – vagyis a legkevesebb élből álló – növelő utak egyikét válasszuk.

Tekintsük a G_f javító gráfot; legyen benne π egy legrövidebb növelő út.
Ennek hosszát (élszámát) jelölje l.
Szélességi kereséssel osszuk szintekre $\Longrightarrow D[v]$

(1) Egy él legfeljebb egy réteggel mehet előre.
A G_f egy $x \to y$ élét nevezzük *vastagnak*, ha $D[y] = D[x] + 1$.

(2) Az l hosszúságú $s \rightsquigarrow t$ utak csupa vastag élből állnak, és nincs l-nél rövidebb $s \rightsquigarrow t$ út.
$\Longleftarrow$ Legrövidebb útnak muszáj mindig feljebb menni

Mi történik, ha javítunk π mentén?

Edmonds–Karp algoritmus

A folyam növelésére mindig a legrövidebb – vagyis a legkevesebb élből álló – növelő utak egyikét válasszuk.

Tekintsük a G_f javító gráfot; legyen benne π egy legrövidebb növelő út.
Ennek hosszát (élszámát) jelölje l.
Szélességi kereséssel osszuk szintekre $\Longrightarrow D[v]$

(1) Egy él legfeljebb egy réteggel mehet előre.
A G_f egy $x \to y$ élét nevezzük *vastagnak*, ha $D[y] = D[x] + 1$.

(2) Az l hosszúságú $s \rightsquigarrow t$ utak csupa vastag élből állnak, és nincs l-nél rövidebb $s \rightsquigarrow t$ út.
$\Longleftarrow$ Legrövidebb útnak muszáj mindig feljebb menni

Mi történik, ha javítunk π mentén?
Legalább egy él telítődik és eltűnik a javító gráfból.

Edmonds–Karp algoritmus

A folyam növelésére mindig a legrövidebb – vagyis a legkevesebb élből álló – növelő utak egyikét válasszuk.

Tekintsük a G_f javító gráfot; legyen benne π egy legrövidebb növelő út.
Ennek hosszát (élszámát) jelölje l.
Szélességi kereséssel osszuk szintekre $\Longrightarrow D[v]$

(1) Egy él legfeljebb egy réteggel mehet előre.
A G_f egy $x \to y$ élét nevezzük *vastagnak*, ha $D[y] = D[x] + 1$.

(2) Az l hosszúságú $s \rightsquigarrow t$ utak csupa vastag élből állnak, és nincs l-nél rövidebb $s \rightsquigarrow t$ út.
$\Longleftarrow$ Legrövidebb útnak muszáj mindig feljebb menni

Mi történik, ha javítunk π mentén?
Legalább egy él telítődik és eltűnik a javító gráfból.
Legfeljebb l darab új él jelenik meg a $G_{f'}$-ben (π élei ellenkező irányítással, ha eddig még 0 folyt át rajtuk).

Edmonds–Karp algoritmus

A folyam növelésére mindig a legrövidebb – vagyis a legkevesebb élből álló – növelő utak egyikét válasszuk.

Tekintsük a G_f javító gráfot; legyen benne π egy legrövidebb növelő út.
Ennek hosszát (élszámát) jelölje l.
Szélességi kereséssel osszuk szintekre $\Longrightarrow D[v]$

(1) Egy él legfeljebb egy réteggel mehet előre.
A G_f egy $x \to y$ élét nevezzük *vastagnak*, ha $D[y] = D[x] + 1$.

(2) Az l hosszúságú $s \rightsquigarrow t$ utak csupa vastag élből állnak, és nincs l-nél rövidebb $s \rightsquigarrow t$ út.
$\Longleftarrow$ Legrövidebb útnak muszáj mindig feljebb menni

Mi történik, ha javítunk π mentén?
Legalább egy él telítődik és eltűnik a javító gráfból.
Legfeljebb l darab új él jelenik meg a $G_{f'}$-ben (π élei ellenkező irányítással, ha eddig még 0 folyt át rajtuk).
$\Longrightarrow$ *a következő növelő út sem lehet rövidebb l-nél*.

Hányszor adódhat egymás után l hosszú növelő út?

Hányszor adódhat egymás után l hosszú növelő út?

Minden javítás után eggyel kevesebb vastag él lesz (legalább egy kritikus él törlődik).

Hányszor adódhat egymás után l hosszú növelő út?

Minden javítás után eggyel kevesebb vastag él lesz (legalább egy kritikus él törlődik).

Addig lesz l élből álló növelő út, amíg marad vastag élekből álló $s \rightsquigarrow t$ út.

Hányszor adódhat egymás után l hosszú növelő út?

Minden javítás után eggyel kevesebb vastag él lesz (legalább egy kritikus él törlődik).

Addig lesz l élből álló növelő út, amíg marad vastag élekből álló $s \rightsquigarrow t$ út.

Tétel. *Az Edmonds–Karp-heurisztika szerinti növelésnél a növelő utak hosszai nem csökkenő sorozatot alkotnak. Ebben a sorozatban egy adott úthosszúság legfeljebb e-szer fordulhat elő. Következésképpen legfeljebb $e(n-1)$ növelés lehetséges. A heurisztika alkalmazásával $O(e^2n)$ elemi lépésben kapunk maximális folyamot.*

Hányszor adódhat egymás után l hosszú növelő út?

Minden javítás után eggyel kevesebb vastag él lesz (legalább egy kritikus él törlődik).

Addig lesz l élből álló növelő út, amíg marad vastag élekből álló $s \rightsquigarrow t$ út.

Tétel. *Az Edmonds–Karp-heurisztika szerinti növelésnél a növelő utak hosszai nem csökkenő sorozatot alkotnak. Ebben a sorozatban egy adott úthosszúság legfeljebb e-szer fordulhat elő. Következésképpen legfeljebb $e(n-1)$ növelés lehetséges. A heurisztika alkalmazásával $O(e^2n)$ elemi lépésben kapunk maximális folyamot.*

Bonyolultabb algoritmusok

Dinic: $O(en^2)$

Hányszor adódhat egymás után l hosszú növelő út?

Minden javítás után eggyel kevesebb vastag él lesz (legalább egy kritikus él törlődik).

Addig lesz l élből álló növelő út, amíg marad vastag élekből álló $s \rightsquigarrow t$ út.

Tétel. *Az Edmonds–Karp-heurisztika szerinti növelésnél a növelő utak hosszai nem csökkenő sorozatot alkotnak. Ebben a sorozatban egy adott úthosszúság legfeljebb e-szer fordulhat elő. Következésképpen legfeljebb $e(n-1)$ növelés lehetséges. A heurisztika alkalmazásával $O(e^2n)$ elemi lépésben kapunk maximális folyamot.*

Bonyolultabb algoritmusok

Dinic: $O(en^2)$

Goldberg, Tarjan: $O(en \log(n^2/e))$

Hálózatok alsó korlátokkal

Tegyük fel, hogy a $c(u, v)$ kapacitások mellett (felső korlát) *alsó korlátok* is vannak az $f(u, v)$ mennyiségekre. $\Longrightarrow$ $k(u, v) \leq f(u, v)$ is teljesüljön a G minden $u \longrightarrow v$ élére.

Hálózatok alsó korlátokkal

Tegyük fel, hogy a $c(u, v)$ kapacitások mellett (felső korlát) *alsó korlátok* is vannak az $f(u, v)$ mennyiségekre. $\Longrightarrow$ $k(u, v) \leq f(u, v)$ is teljesüljön a G minden $u \longrightarrow v$ élére.

$\Longrightarrow$ (G, s, t, c, k)

Hálózatok alsó korlátokkal

Tegyük fel, hogy a $c(u, v)$ kapacitások mellett (felső korlát) *alsó korlátok* is vannak az $f(u, v)$ mennyiségekre. $\Longrightarrow$ $k(u, v) \leq f(u, v)$ is teljesüljön a G minden $u \longrightarrow v$ élére.

$\Longrightarrow$ (G, s, t, c, k)

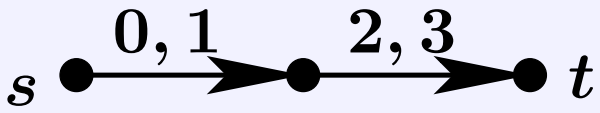
Van-e egyátalán ilyen folyam?

Hálózatok alsó korlátokkal

Tegyük fel, hogy a $c(u, v)$ kapacitások mellett (felső korlát) *alsó korlátok* is vannak az $f(u, v)$ mennyiségekre. $\Longrightarrow$ $k(u, v) \leq f(u, v)$ is teljesüljön a G minden $u \longrightarrow v$ élére.

$\Longrightarrow$ (G, s, t, c, k)

Van-e egyátalán ilyen folyam?

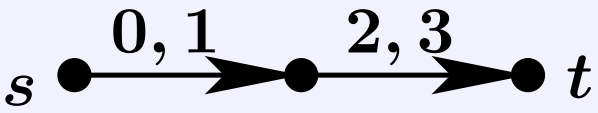


Hálózatok alsó korlátokkal

Tegyük fel, hogy a $c(u,v)$ kapacitások mellett (felső korlát) *alsó korlátok* is vannak az $f(u,v)$ mennyiségekre. $\Longrightarrow$ $k(u,v) \leq f(u,v)$ is teljesüljön a G minden $u \longrightarrow v$ élére.

$\Longrightarrow$ (G, s, t, c, k)

Van-e egyátalán ilyen folyam?



Belátjuk, hogy ez a hagyományos folyamproblémára visszavezethető.

$$\mathcal{H} = (G, s, t, c, k) \rightarrow \mathcal{H}'$$

$\mathcal{H} = (G, s, t, c, k) \rightarrow \mathcal{H}'$

- Új forrás: S, új nyelő: T

$\mathcal{H} = (G, s, t, c, k) \rightarrow \mathcal{H}'$

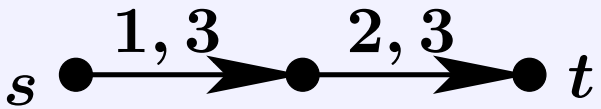
- Új forrás: S, új nyelő: T
- Régi éleken új kapacitás: $c'(u, v) := c(u, v) - k(u, v)$

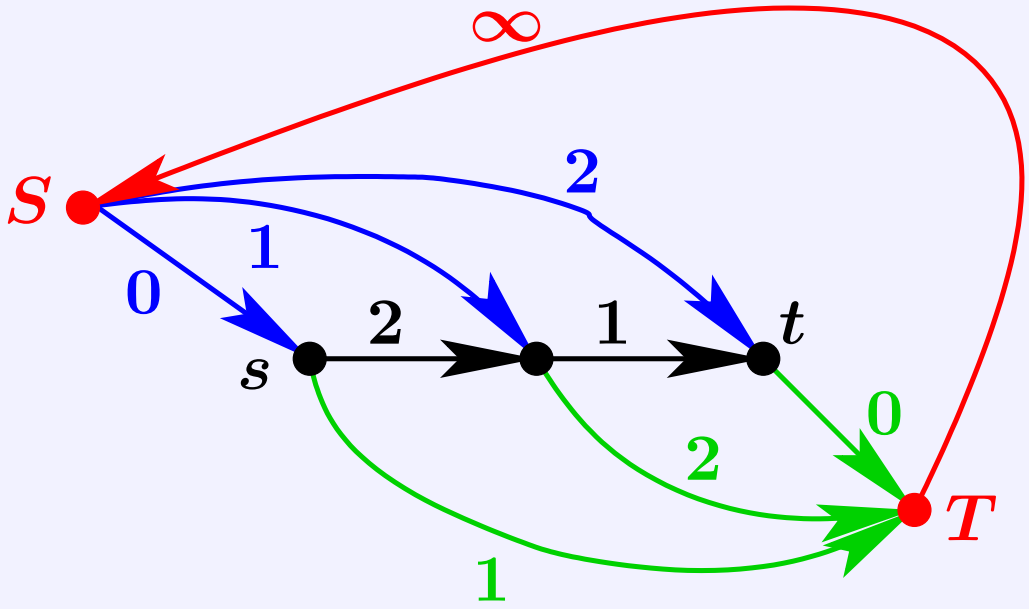
$\mathcal{H} = (G, s, t, c, k) \rightarrow \mathcal{H}'$

- Új forrás: S, új nyelő: T
- Régi éleken új kapacitás: $c'(u, v) := c(u, v) - k(u, v)$
- $\mathbf{2}$ új él minden pontra: $S \rightarrow v$ és $v \rightarrow T$
  $c'(S, v) := \sum_{(u,v) \in E} k(u, v)$ és $c'(v, T) := \sum_{(v,w) \in E} k(v, w)$

$\mathcal{H} = (G, s, t, c, k) \to \mathcal{H}'$

- Új forrás: S, új nyelő: T
- Régi éleken új kapacitás: $c'(u, v) := c(u, v) - k(u, v)$
- 2 új él minden pontra: $S \to v$ és $v \to T$
  $c'(S, v) := \sum_{(u,v) \in E} k(u, v)$ és $c'(v, T) := \sum_{(v,w) \in E} k(v, w)$
- Új $T \to S$ él ∞ kapacitással





Tétel. *A $\mathcal{H} = (G, s, t, c, k)$ hálózatban akkor és csak akkor létezik folyam, ha a $\mathcal{H}'$ hálózat (S-ből T-be menő) maximális folyamának az értéke $\sum_{(u,v)\in E} k(u, v)$.*

Tétel. *A $\mathcal{H} = (G, s, t, c, k)$ hálózatban akkor és csak akkor létezik folyam, ha a $\mathcal{H}'$ hálózat (S-ből T-be menő) maximális folyamának az értéke $\sum_{(u,v)\in E} k(u, v)$.*

Ha a $T \to S$ él kapacitást d-nek választjuk $\implies$ ugyanígy megkaphatjuk, hogy van-e legfeljebb d értékű folyam

Tétel. *A $\mathcal{H} = (G, s, t, c, k)$ hálózatban akkor és csak akkor létezik folyam, ha a $\mathcal{H}'$ hálózat (S-ből T-be menő) maximális folyamának az értéke $\sum_{(u,v)\in E} k(u, v)$.*

Ha a $T \to S$ él kapacitást d-nek választjuk $\implies$ ugyanígy megkaphatjuk, hogy van-e legfeljebb d értékű folyam
$\implies$ algoritmus alsó korlátos folyamokra

Egy ütemezési feladat

Tegyük fel, hogy egy légitársaság a $J_1, J_2, \ldots, J_m$ járatokat szeretné üzemeltetni, és d darab azonos típusú repülőgépe van erre a célra.

Egy ütemezési feladat

Tegyük fel, hogy egy légitársaság a $J_1, J_2, \ldots, J_m$ járatokat szeretné üzemeltetni, és d darab azonos típusú repülőgépe van erre a célra. Minden J_i, J_j járatpárra ismert, hogy van-e elég idő arra, hogy a J_i teljesítése után egy gép felkészüljön a J_j repülésére.

Egy ütemezési feladat

Tegyük fel, hogy egy légitársaság a $J_1, J_2, \ldots, J_m$ járatokat szeretné üzemeltetni, és d darab azonos típusú repülőgépe van erre a célra.
Minden J_i, J_j járatpárra ismert, hogy van-e elég idő arra, hogy a J_i teljesítése után egy gép felkészüljön a J_j repülésére.
Ha J_i, J_j-re a válasz igenlő, akkor azt mondjuk, hogy J_j *követheti* J_i-t.

Egy ütemezési feladat

Tegyük fel, hogy egy légitársaság a $J_1, J_2, \ldots, J_m$ járatokat szeretné üzemeltetni, és d darab azonos típusú repülőgépe van erre a célra.
Minden J_i, J_j járatpárra ismert, hogy van-e elég idő arra, hogy a J_i teljesítése után egy gép felkészüljön a J_j repülésére.
Ha J_i, J_j-re a válasz igenlő, akkor azt mondjuk, hogy J_j *követheti* J_i-t.

Gráf:

Egy J_i légijáratnak $\Longrightarrow$ két csúcs, i és i' és egy $i \to i'$ él

Egy ütemezési feladat

Tegyük fel, hogy egy légitársaság a $J_1, J_2, \ldots, J_m$ járatokat szeretné üzemeltetni, és d darab azonos típusú repülőgépe van erre a célra.
Minden J_i, J_j járatpárra ismert, hogy van-e elég idő arra, hogy a J_i teljesítése után egy gép felkészüljön a J_j repülésére.
Ha J_i, J_j-re a válasz igenlő, akkor azt mondjuk, hogy J_j *követheti* J_i-t.

Gráf:

Egy J_i légijáratnak $\Longrightarrow$ két csúcs, i és i' és egy $i \to i'$ él
Ha J_j követheti J_i-t, akkor vezessünk irányított élet i'-ből j-be.

Egy ütemezési feladat

Tegyük fel, hogy egy légitársaság a $J_1, J_2, \ldots, J_m$ járatokat szeretné üzemeltetni, és d darab azonos típusú repülőgépe van erre a célra.
Minden J_i, J_j járatpárra ismert, hogy van-e elég idő arra, hogy a J_i teljesítése után egy gép felkészüljön a J_j repülésére.
Ha J_i, J_j-re a válasz igenlő, akkor azt mondjuk, hogy J_j *követheti* J_i-t.

Gráf:

Egy J_i légijáratnak $\Longrightarrow$ két csúcs, i és i' és egy $i \to i'$ él
Ha J_j követheti J_i-t, akkor vezessünk irányított élet i'-ből j-be.
Vegyünk még fel egy s forrást és egy t nyelőt, és adjuk a hálózathoz az $s \to i$ és $i' \to t$ éleket ($1 \leq i \leq m$).

Egy ütemezési feladat

Tegyük fel, hogy egy légitársaság a $J_1, J_2, \ldots, J_m$ járatokat szeretné üzemeltetni, és d darab azonos típusú repülőgépe van erre a célra.
Minden J_i, J_j járatpárra ismert, hogy van-e elég idő arra, hogy a J_i teljesítése után egy gép felkészüljön a J_j repülésére.
Ha J_i, J_j-re a válasz igenlő, akkor azt mondjuk, hogy J_j *követheti* J_i-t.

Gráf:

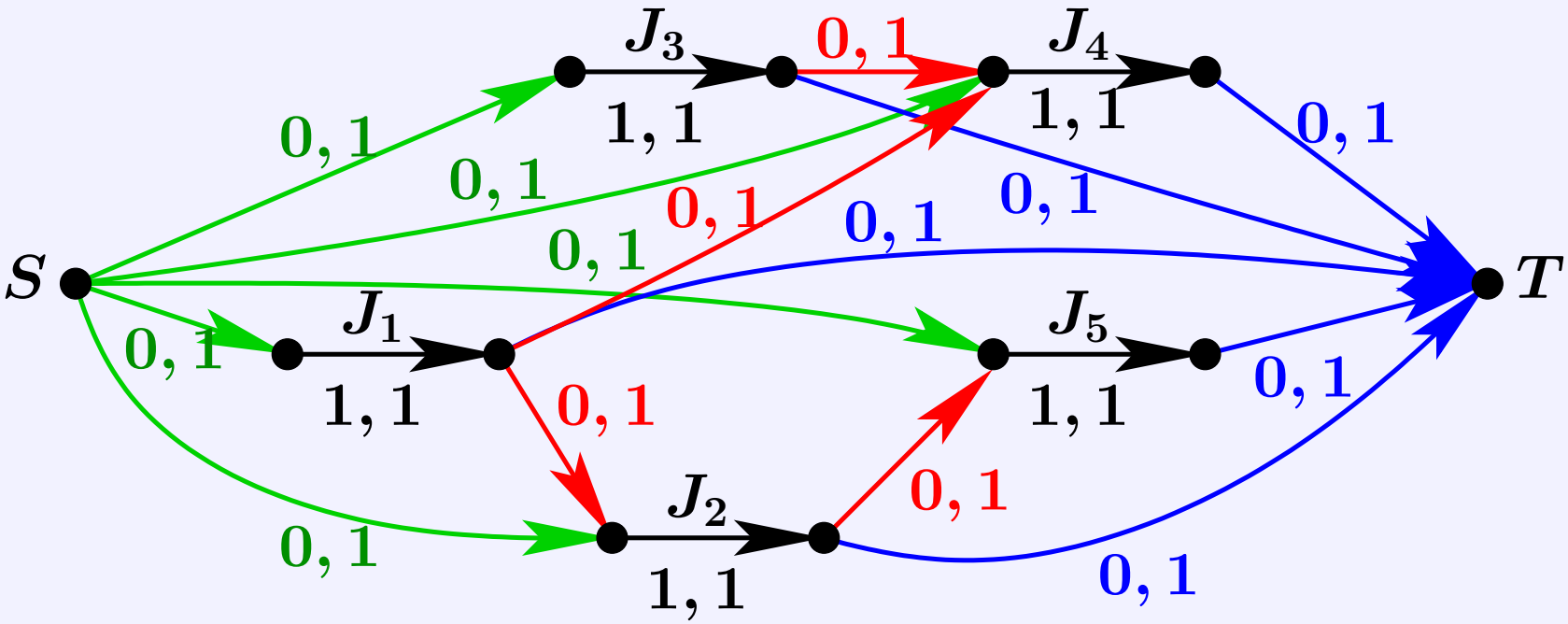
Egy J_i légijáratnak $\Longrightarrow$ két csúcs, i és i' és egy $i \to i'$ él
Ha J_j követheti J_i-t, akkor vezessünk irányított élet i'-ből j-be.
Vegyünk még fel egy s forrást és egy t nyelőt, és adjuk a hálózathoz az $s \to i$ és $i' \to t$ éleket ($1 \leq i \leq m$).
Az összes él kapacitása legyen 1. Az $i \to i'$ alakú élek alsó korlátja legyen 1, a többi élé pedig 0.

Egy ütemezési feladat

Tegyük fel, hogy egy légitársaság a $J_1, J_2, \ldots, J_m$ járatokat szeretné üzemeltetni, és d darab azonos típusú repülőgépe van erre a célra.
Minden J_i, J_j járatpárra ismert, hogy van-e elég idő arra, hogy a J_i teljesítése után egy gép felkészüljön a J_j repülésére.
Ha J_i, J_j-re a válasz igenlő, akkor azt mondjuk, hogy J_j *követheti* J_i-t.

Gráf:

Egy J_i légijáratnak $\Longrightarrow$ két csúcs, i és i' és egy $i \to i'$ él
Ha J_j követheti J_i-t, akkor vezessünk irányított élet i'-ből j-be.
Vegyünk még fel egy s forrást és egy t nyelőt, és adjuk a hálózathoz az $s \to i$ és $i' \to t$ éleket ($1 \leq i \leq m$).
Az összes él kapacitása legyen 1. Az $i \to i'$ alakú élek alsó korlátja legyen 1, a többi élé pedig 0.
Tétel. *A $J_1, J_2, \ldots, J_m$ járatok akkor és csak akkor teljesíthetők legfeljebb d géppel, ha a hálózathoz van olyan g folyam, amelyre $|g| \leq d$.*


J_3
J_4
J_1
J_5
J_2
S
T
0, 1
1, 1

Hirdetmények

Hirdetmények

Április 1. $\Longrightarrow$ Húsvét hétfő $\Longrightarrow$ elmarad az előadás

Hirdetmények

Április 1. $\Longrightarrow$ Húsvét hétfő $\Longrightarrow$ elmarad az előadás

Április 8. $\Longrightarrow$ Előadás helyett konzultáció

Hirdetmények

Április 1. $\Longrightarrow$ Húsvét hétfő $\Longrightarrow$ elmarad az előadás

Április 8. $\Longrightarrow$ Előadás helyett konzultáció

ZH Április 8. 16:15

A–He	CH. max.
Hi–Ka	I.B. 27
Ke–M	I.B. 28
N-Se	E.I.B.
Si-Z	St. nagy