Algoritmuselmélet

Lineáris és egészértékű programozás

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

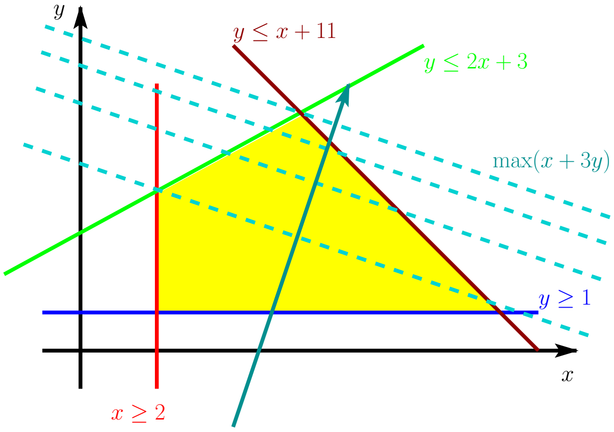
A Lineáris Programozás probléma

LP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.

Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ számok, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1x_1 + \ldots + c_mx_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket? Ezt célfüggvénynek hívjuk.



A Lineáris Programozás probléma

Tétel

A Lineáris Programozás probléma P*-ben van.*

Legjobb algoritmus (Karmarkar): $v^{3,5}e$, ahol v a változók száma, e az egyenletek „összmérete”.

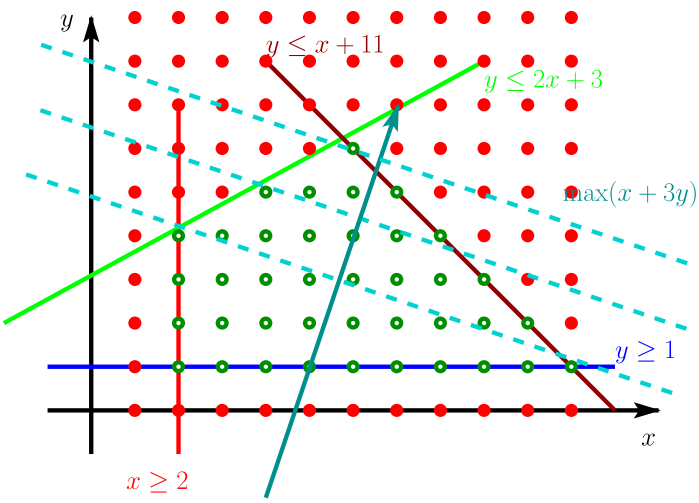
Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

IP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.

Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egészek, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1x_1 + \ldots + c_mx_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket és mindegyik egész?



Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

Tétel

Az IP probléma NP-teljes.

Bizonyítás.

IP $\in \mathrm{NP}$: tanú egy megoldás, (bár nehéz belátni, hogy a megoldás polinom méretű!) $\surd$
Belátjuk, hogy SAT $\prec$ IP
$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_6) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_5 \vee \neg x_6) \Longrightarrow$

$0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1; \ldots; 0 \leq x_6 \leq 1$
$x_1 + (1 - x_2) + x_5 \geq 1$
$x_2 + (1 - x_3) + x_6 \geq 1$
$(1 - x_2) + x_3 + x_5 + (1 - x_6) \geq 1$

$\square$

Tétel

A G gráf kromatikus számának meghatározását felírhatjuk IP problémaként.

Bizonyítás.

Legyen $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$
Változók: $\forall i, j \in [1..n]$-re x_{ij} legyen 1, ha v_i színe j
$\forall i \in [1..n]$-re w_i, legyen 1, ha van j színű pont
Célfüggvény: $\min_j \sum w_j$ $(= \max_j \sum -w_j)$
Egyenlőtlenségek:
$\forall i, j \in [1..n]$-re $0 \leq x_{ij} \leq 1; 0 \leq w_j \leq 1$, azaz minden változó értéke csak 0 vagy 1 lehet
$\forall i \in [1..n]$-re $1 \leq \sum_j x_{ij} \leq 1$ azaz minden csúcsnak pont egy színe van
$\forall \{u, v\} \in E(G)$-re és $\forall j \in [1..n]$-re $x_{uj} + x_{vj} \leq 1$, azaz egy él két végpontja nem lehet j színű
$\forall i, j \in [1..n]$-re $x_{ij} \leq w_j$, azaz ha valamelyik pont színe j, akkor van j színű pont
Az IP probléma megoldása megfelel egy minimális számú színt használó színezésnek.

$\square$