Algoritmuselmélet

Közelítő algoritmusok

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közelítő algoritmusok

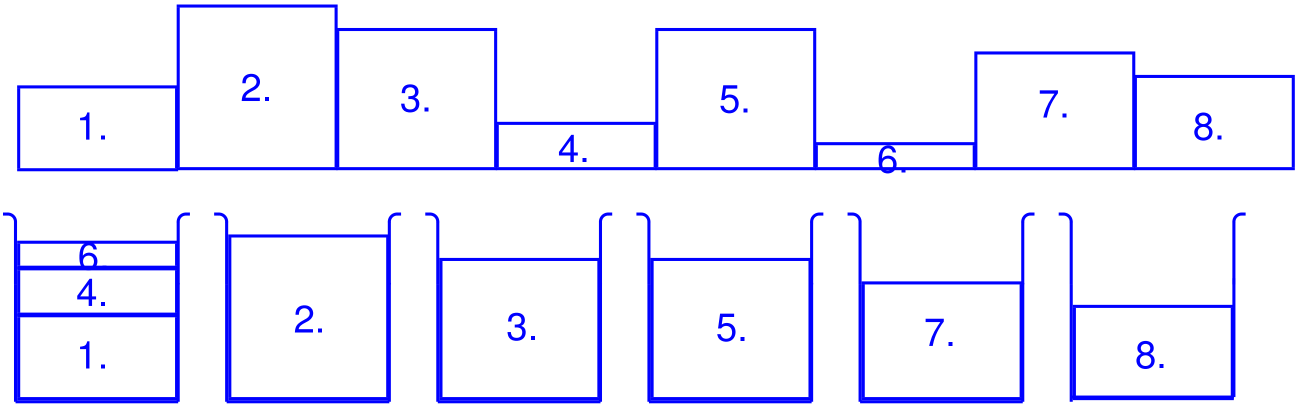
Hátha nem szükséges pontos megoldás, elég az optimumtól nem túl messze levő is.

Ládapakolás: Adottak az $s_1, \ldots, s_m$ (racionális) súlyok, $0 \leq s_i \leq 1$. A cél a súlyok elhelyezése minél kevesebb 1 súlykapacitású ládába.

$\mathcal{NP}$-nehéz, a PARTÍCIÓ probléma visszavezethető rá.

Ládapakolás

FF-módszer (*first fit*): Vegyünk először üres ládákat, és számozzuk meg őket az $1, 2, \ldots, m$ egészekkel.
Tegyük fel, hogy az $s_1, \ldots, s_{i-1}$ súlyokat már elhelyeztük. Ekkor s_i kerüljön az első (legkisebb sorszámú) olyan ládába, amelybe még befér.



First Fit

Tétel

Jelölje a Ládapakolás probléma egy I inputjára $OPT(I)$ az optimális (minimálisan elegendő), $FF(I)$ pedig az FF-módszer által eredményezett ládaszámot. A probléma tetszőleges I inputjára teljesül, hogy $FF(I) \leq 2OPT(I)$.

Bizonyítás.

$\lceil \sum_{i=1}^{m} s_i \rceil \leq OPT(I)$
$FF(I) \leq \lceil 2 \sum_{i=1}^{m} s_i \rceil \Longleftarrow$ nincs két olyan láda, amely nincs félig kitöltve.
Felhasználjuk, hogy $\lceil 2x \rceil \leq 2\lceil x \rceil$:

$$FF(I) \leq \lceil 2 \sum_{i=1}^{m} s_i \rceil \leq 2 \lceil \sum_{i=1}^{m} s_i \rceil \leq 2OPT(I).$$

$\surd$ $\square$

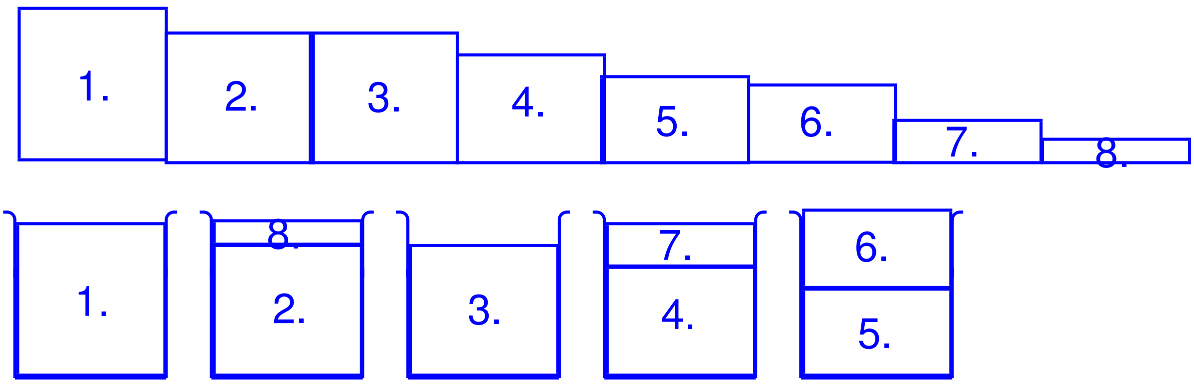
First Fit

Tétel (D. S. Johnson és munkatársai, 1976)

A probléma tetszőleges I inputjára teljesül, hogy $FF(I) \leq \lceil 1.7 OPT(I) \rceil$*. Továbbá vannak tetszőlegesen nagy méretű I inputok, melyekre* $FF(I) \geq 1.7(OPT(I) - 1)$*.*

First Fit Decreasing

FFD-módszer (first fit decreasing): először rendezzük a súlyokat nem növő sorrendbe, utána alkalmazzuk az *FF*-módszert.



Tétel (D. S. Johnson, 1973)

Tetszőleges I inputra teljesül, hogy $FFD(I) \leq \frac{11}{9} OPT(I) + 4$*, és tetszőlegesen nagy méretű I inputok vannak, melyekre* $FFD(I) \geq \frac{11}{9} OPT(I)$*.* $(\frac{11}{9} = 1.222\ldots)$

Jobb approximáció

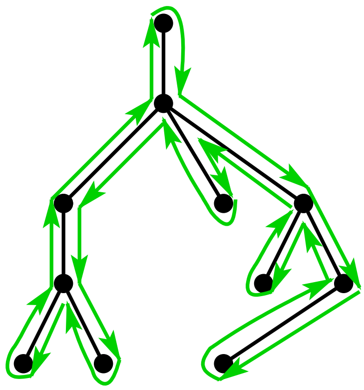
Tétel (W. Fernandez de la Vega, G. S. Lueker)

Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan P lineáris algoritmus, amire $P(I) \leq (1+\varepsilon)OPT(I) + 1$.

Futásideje: $O(n) + 2^{2^{O((1/\varepsilon)\log(1/\varepsilon))}}$

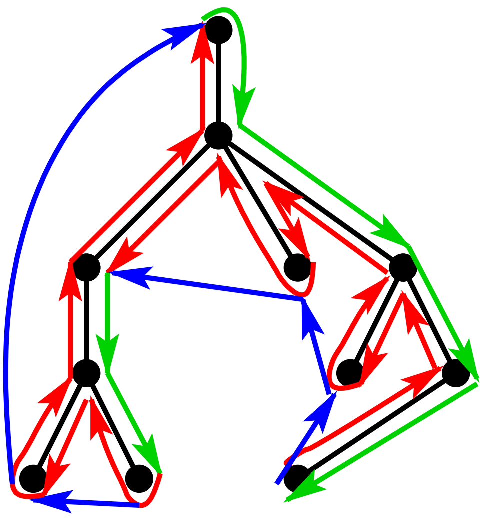
Euklideszi utazó ügynök probléma

Az n pontú K_n teljes gráf élein adott a nemnegatív értékű d súlyfüggvény. Erre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség: tetszőleges különböző u, v, w csúcsokra érvényes a $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ egyenlőtlenség (az euklideszi feltétel).
A cél egy minimális összsúlyú Hamilton-kör keresése.
Keresünk egy minimális összsúlyú feszítőfát (pl. Kruskal), megkettőzzük az éleit és „körbejárjuk” egy Euler-körsétával.



A minimális feszítőfa összsúlya legyen s $\Longrightarrow$ Euler-séta hossza $2s$.

Ez nem Hamilton-kör $\Longrightarrow$ levágjuk a fölösleges részeket, közben rövidítünk is.



Ha az optimális Hamilton-körből elhagyunk egy élet $\Longrightarrow$ egy legalább s súlyú feszítőfát kapunk.

A módszer legfeljebb 2-szer akkora utat ad, mint az optimális.