1. Honnan látszik A szomszédossági mátrixból, hogy hány csúcsa és hány éle van az irányítatlan gráfnak? Honnan látszanak a fokszámok?

   Megoldás: Annyi csúcs van, ahány sor, azaz 5. $d(v_i)$ az i-edik sorban lévő 1-esek száma. $d(v_1) = 2, d(v_2) = 4, d(v_3) = 2, d(v_4) = d(v_5) = 3$. Az élek száma a fokszámtétel szerint a fokszámok összegének fele, tehát 7.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. (a) Honnan látjuk, hogy a B szomszédossági mátrix irányított gráfhoz tartozik?
   (b) Honnan látszik, hogy mennyi az egyes csúcsok ki- és be-foka?

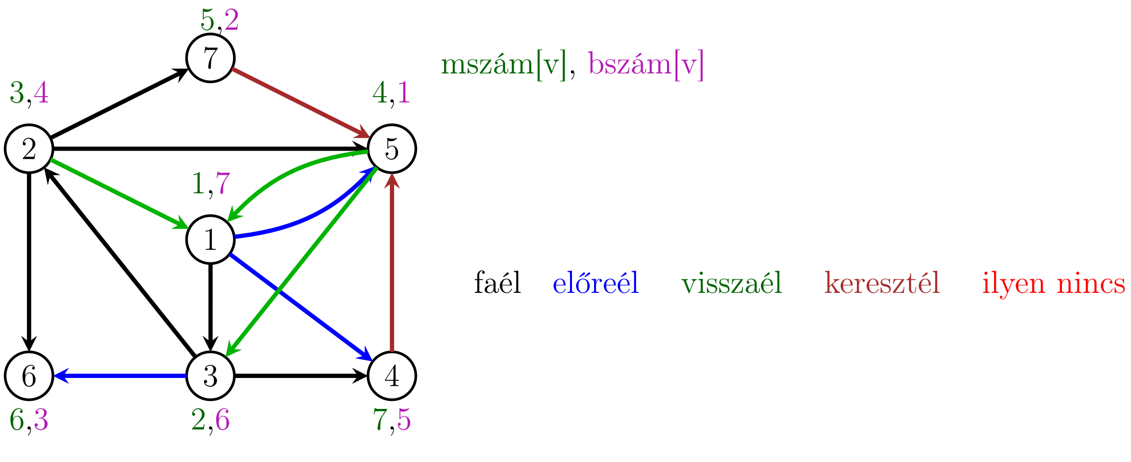
   Megoldás: (a) Az irányítatlan gráfok szomszédossági mátrixa szimmetrikus, ez nem az. (b) $d_{ki}(v_i)$ az i-edik sorban lévő 1-esek száma. $d_{ki}(v_1) = 2, d_{ki}(v_2) = 1, d_{ki}(v_3) = 3, d_{ki}(v_4) = 1, d_{ki}(v_5) = 0$. $d_{be}(v_i)$ az i-edik oszlopban lévő 1-esek száma. $d_{be}(v_1) = 0, d_{be}(v_2) = 2, d_{be}(v_3) = 1, d_{be}(v_4) = d_{be}(v_5) = 2$.

3. Mennyi az egyes csúcsok ki-foka az **a**: b, c; **b**: e, d; **c**: d; **d**: f; **e**: f; **f**: $-$ szomszédossági lista által adott irányított gráfban? Mennyi az f csúcs be-foka?

   Megoldás: A kifokok rendre: 2,2,1,1,1,0. Az f befoka: 2.

4. Futtassa le a DFS-MAIN(G)-t az alábbi (szomszédossági listával adott) irányított gráfban úgy, hogy a csúcsok és a szomszédok vizsgálatakor az éllistában adott sorrendet követi! Adja meg a csúcsok mélységi és befejezési számát is! **1**: 3,4,5; **2**: 1,5,7,6; **3**: 2,4,6; **4**: 5; **5**: 3,1; **6**: $-$; **7**: 5
   Mely élek lesznek faélek? Mely élek lesznek előreélek, visszaélek és keresztélek?

   Megoldás:



---

5. Egy gráf fordított éllistájában (szomszédossági listájában) minden csúcsnál a csúcsba bejövő élek vannak felsorolva. Adjon $O(n + m)$ lépésszámú algoritmust, ami az éllistából elkészíti a fordított éllistát.

   Megoldás: A fordított éllistához először lemásoljuk a csúcsok tömbjét és mindegyikhez egy üres listát rendelünk. Ez eddig $O(n)$ lépés. Ez most azt a gráfot írja le, amiben ugyanazok a pontok vannak, de még egyetlen él sincs benne. Ezután végigmegyünk az eredeti éllistán. Amikor egy új (x,y) élet találunk, akkor a fordított éllistához hozzáadjuk az (y,x) élet, azaz az y csúcs listájának elejére illesztjük az x csúcsot. Egy ilyen beszúrás $O(1)$ lépést igényel (a láncolt lista elejére tesszük). Mivel eredetileg m él van, ez összesen $O(m)$ lépés, vagyis a teljes lépésszám $O(n + m)$.

6. Egy hat pontú irányított gráf csúcsait egy mélységi bejárás a, c, f, e, d, b sorrendben járja be, a befejezési számok pedig ezek: a: 6; b: 5; c: 4; d: 3; e: 2; f: 1.
   Lehetséges-e, hogy a gráfban van él (a) f-ből e-be? (b) d-ből e-be?

Megoldás: (a) Mivel mszám$[f] = 3 <$ mszám$[e] = 4$, ezért biztos, hogy amikor f-et bejárjuk, akkor e-t még nem látogattuk meg. Ha lenne él f-ből e-be, akkor f-ből még tudnánk tovább lépni (például e-be), így nem lehetne f az elsőnek befejezett csúcs.
(b) Ez lehetséges. Pl. ha a gráf éllistája **a** : c,b; **b** : $-$; **c** : f,e,d; **d** : e; **e** : $-$; **f** : $-$, akkor a DFS éppen a megadott mélységi és befejezési számokat adják. A (d,e) él ekkor keresztél lesz.

7. Egy szomszédossági listával adott irányított G gráfban mindegyik csúcs színes, vagy piros vagy zöld (ez az információ egy, a csúcsokkal indexelt C tömbben adott) és adott a gráfban egy piros s és egy piros t csúcs. (a) Adjon $O(n+m)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy van-e az s-ből t-be olyan út, ami csak piros csúcsokon megy át. (b) Adjon $O(n(n+m))$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy van-e s-ből t-be olyan út, ami legfeljebb egy zöld csúcson megy át.

Megoldás: (a) Először átalakítjuk a gráfot úgy, hogy a zöld csúcsok ne legyenek elérhetők, aztán a kapott új G_1 gráfban futtatjuk a DFS(G_1,s) mélységi bejárást az s csúcsból és ha eközben elérjük t-t, akkor van ilyen út, különben pedig nincsen.

Lépésszám: A gráf átalakítása úgy történik, hogy végigmegyek az éllistán és minden olyan élet törlök, aminek valamelyik vége zöld. Ez az éllista egyszeri végigjárásával megoldható és a szomszédok listájából egy él törlése konstans lépés, azaz ez összesen $O(n+m)$, az ezutáni DFS-ben pedig egy n csúcsú, legfeljebb m élű gráffal dolgozok, azaz ezen rész lépésszáma is $O(n+m)$.

Az algoritmus helyessége: Az új gráfban pontosan akkor van út s és t között, ha az eredetiben van csupa piros ilyen út, azt pedig a DFS jól eldönti, hogy G_1-ben t elérhető-e s-ből.

(b) A gráf minden zöld z csúcsára megcsináljuk a következőt: pirossá nyilvánítjuk a z csúcsot és futtatjuk az (a) pont algoritmusát. Ezzel kiderítjük azt, hogy van-e olyan út s-ből t-be, amin csak eredetileg is piros csúcsok, illetve esetleg még z szerepel. Ez az eljárás minden zöld csúcsra $O(n+m)$ lépés, legfeljebb n-szer csináljuk meg, azaz összesen $O(n(n+m))$ lépés.

8. Egy szomszédossági mátrixával adott irányított G gráfban szeretnénk meghatározni az összes olyan csúcsot, ahonnan egy adott t csúcs irányított úton elérhető. Adjon erre a feladatra $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust.

Megoldás: Ha t elérhető irányított úton s-ből, akkor ha minden él irányát megfordítjuk, akkor s elérhető lesz irányított úton t-ből. Ennek a gráfnak a szomszédossági mátrixát könnyen előállíthatjuk az eredeti szomszédossági mátrixból, vegyük a transzponáltját. Az új gráfban futtassuk a DFS(G,t) eljárást. A transzponált előállítása és a DFS lépésszáma is $O(n^2)$, ezért az össz lépésszám is $O(n^2)$.
Ha a gráf éllistával lenne megadva, akkor az 5. feladat megoldását felhasználva hasonlóan belátható, hogy $O(n+m)$ lépésben megkaphatjuk a keresett csúcsokat.

---

9. Egy kezdő autóvezető a városban való közlekedése során szeretne gyakorlatának megfelelő útvonalat választani. Az úthálózat egy irányítatlan gráfként van megadva, a csúcsok a kereszteződések, az élek az utak, a csúcsoknál adott, hogy nehéz-e számára az a kereszteződés. (Az hogy nehéz, a kereszteződés tulajdonsága, nem azon múlik, merről érkezik oda és merre akar rajta áthaladni.)

   Adjon algoritmust, amivel meg lehet határozni, hogy az autós az egyik adott csúcsnál levő otthonából mely csúcsokba tud autóval úgy eljutni, hogy útja során két nehéz csúcs soha nem jön közvetlenül egymás után. Az algoritmus lépésszáma szomszédossági listás megadás esetén legyen $O(n+m)$.

Megoldás: Töröljük ki az éllistából azokat az éleket, amelyek nehéz csomópontból nehéz csomópontba vezető utaknak felelnek meg. Ez az éllista egyszeri végigjárásával az éllista méretében lineáris lépésszámmal, tehát $O(n+m)$ lépésben megtehető. Ezután az így kapott éllistájú új G' gráfban futtassuk le a DFS(G',v) algoritmust, ahol v a kezdő vezető otthonának megfelelő csúcs. G'-nek $n' = n$ csúcsa és $m' \leq m$ éle van, tehát a DFS $O(n'+m') = O(n+m)$ lépést vesz igénybe. Az algoritmus által elért csúcsok éppen azok, amelyekbe v-ből vezet út G'-ben, vagyis pont azok, amelyekbe az eredeti G gráfnak megfelelő eredeti úthálózatban v-ből el lehet jutni úgy, hogy ne következzen egymás után két nehéz kereszteződés.

10. Adjon $O(n+m)$ lépésszámú algoritmust a 7(b) feladatra.

    Megoldás: Először lefuttatjuk a 7(a) feladat algoritmusát, hogy eldöntsük, hogy van-e csupa piros út. Ha van, akkor készen vagyunk.

    Ezután, az algoritmus második részében eldöntjük, hogy van-e pontosan egy zöld csúcsot tartalmazó út úgy, hogy meghatározzuk azokat a zöld csúcsokat, akik s-ből elérhetők és akikből t is elérhető. Ehhez először töröljük a zöld csúcsokból kimenő éleket, ez $O(n+m)$ lépésben megtehető. Az így kapott G_1 gráfban lefuttatjuk a DFS(G_1,s) algoritmust és az s-ből elérhető zöld csúcsokat feljegyezzük egy T_1 tömbben ($T_1 = 1$, ha a csúcs elérhető volt és zöld, különben meg $T_1 = 0$), ennek lépésszáma $O(n+m')$, ahol m' az új gráf élszáma, de $m' \leq m$, ezért ez $O(n+m)$. Mivel a kimenő éleket töröltük a G gráfból, így pontosan azokat a zöld csúcsokat fedezi fel a DFS, amik piros csúcsokon keresztül elérhetőek.

    A következő lépésben megfordítjuk G éleinek irányát és az új gráfban töröljük a zöld csúcsokból kimenő éleket. Legyen az így kapott gráf G_2. Most a DFS(G_2,t) algoritmust futtatva megkapjuk azon zöld csúcsokat, amik t-ből elérhetőek irányított úton, ezeket feljegyezzük egy T_2 tömbben. Az élek megfordítása miatt minden T_2-ben 1-re állított zöld csúcsból van az eredeti gráfban irányított út t-be, továbbá a kimenő élek törlésével ez az út csak piros csúcsokon megy keresztül.

    Ezután végigmegyünk a T_1 és T_2 tömbökön, és ha találunk olyan v csúcsot, amire $T_1[v] = T_2[v] = 1$, akkor s-ből el tudunk jutni irányított úton csak piros csúcsokat érintve ebbe a zöld v csúcsba, majd onnan t-be piros csúcsokon keresztül. Ha nincs ilyen metszet, akkor nincs ilyen irányított út pontosan egy zöld csúccsal. Mivel a gráfok módosítása ($O(n+m)$) és DFS kétszeri futtatása (mindegyik $O(n+m)$) után csak a két tömbön kell végighaladni és ez $O(n)$, így a lépésszám $O(m+n)$.

    2. Megoldás: Vegyünk még egy példányát a G gráfnak, legyen ez G'. Minden G-beli v csúcsnak lesz megfelelője G'-ben, jelölje ezt v'. Ezután G-ben minden zöld csúcsból kimenő (v,w) élét töröljünk ki, viszont adjuk hozzá helyette a (v,w') élet, majd G'-ben töröljük a zöld csúcsokból kimenő összes élet. Az így kapott gráf legyen H. Futtassuk a DFS(H,s) algoritmust. Ha ez talál irányított utat t-be, vagy t'-be, akkor az egy megfelelő út lesz.

    Lépésszám: H pontszáma $2n$, élszáma legfeljebb $2m$, ugyanis először minden élet megkettőzünk, majd néhányat áthelyezünk, végül G'-ből esetleg törünk is éleket. Ezen a mélységi keresés futtatása $O(2n+2m) = O(n+m)$ lépés.

    Helyesség: Ha van irányított út s-ből t-be, akkor az végig a módosított G-ben haladt, mivel G'-ből G-be nem lehet visszatérni. Mivel G-n belül zöld csúcsból nincs kimenő él, ezért az ilyen út nem tartalmaz zöld csúcsot. Ha van irányított út s-ből t'-be, akkor az egyszer kénytelen átlépni G-ből G-be és ilyenkor egy zöld ponton halad át. Mivel visszalépni már nem lehet G-be, és G'-ben nincs zöld csúcsból induló él, ezért az ilyen út pontosan egy zöld csúcsot tartalmaz. Könnyen látható a fordított irány is, azaz ha van megfelelő út az eredeti G gráfban, akkor lesz egy megfelelő út H-ban is.

    Megjegyzés: Ennek a módszernek az alapötlete alkalmazható akkor is, ha olyan utat keresünk, amelyik legfeljebb 2,3,... zöld csúcsot tartalmaz. (Ilyenkor több példány kell a gráfból.) Sőt kis módosítással akkor is, ha olyan utakat keresünk, ami pontosan 1,2,3,... zöld csúcsot tartalmaz. A lépésszám mindig $O(n+m)$ marad, feltéve, hogy az előírt zöld csúcsok száma konstans, nem függ n-től.

11. Adjunk algoritmust, mely egy éllistával megadott irányítatlan gráfban vagy talál egy kört, vagy igazolja a gráf körmentességét $O(n)$ időben (függetlenül attól, hogy m akár sokkal nagyobb is lehet, mint n)!

    Megoldás: Módosítsuk a mélységi bejáró algoritmust úgy, hogy álljunk meg, ha a soron következő él mentén már bejárt csúcsba jutunk. Ha ez nem következik be, akkor a gráf körmentes. Ha igen, akkor az él visszaél és a meglevő feszítő erdőben a végpontjai között menő úttal együtt kört alkot. Bármely eset is következik be, a bejárás legfeljebb n él megtekintése után véget ér, hiszen egy erdőnk és esetleg még egy élünk van. A szélességi bejárás hasonlóan módosítható.

12. A szomszédossági listával adott egy összefüggő, irányított G gráf, melynek minden éle az $1,2,\ldots,k$ egész számok valamelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak *maximuma*.

Adott a gráf két csúcsa, x és y. Adjon $O(m \log k)$ lépésszámú algoritmust annak meghatározására, hogy mennyi a lehető legkisebb értékű x-ből y-ba vezető út értéke.

Megoldás: Egy bináris kereséshez hasonló algoritmust fogunk használni. Először vizsgáljuk meg, hogy a $\frac{k}{2}$-nél nagyobb súlyú élek eltávolításakor keletkező gráfban van-e irányított út x-ből y-ba. Ha van út az új módosított gráfban x-ből y-ba, akkor megvizsgáljuk, hogy kisebb élsúlyok esetén is lehet-e út x és y között, így a folyamatot megismételjük $\frac{k}{4}$-re. Ha a $\frac{k}{2}$-nél nagyobb súlyú élek törlésével már nem lesz út x és y között, akkor növeljük a keresendő súlyokat. Ebben az esetben a $\frac{3k}{4}$-nél nagyobb súlyú éleket töröljük és folytatjuk az algoritmust. Az eljárás biztosan megtalálja a minimális l súlyú utat x és y között, mivel ha létezne egy legfeljebb $(l-1)$ súlyú út, akkor az $(l-1)$ súlyú éleknél nagyobb súlyok törlésével kapott gráfban x-ből y elérhető lenne, így az algoritmus nem az l súlyú úttal térne vissza. A lépésszáma $O(m \log k)$, mivel minden felezésnél legfeljebb m él törlését végezzük el, majd DFS-t futtatunk $O(n+m)$ lépés alatt, ezt pedig $\log k$-szor hajtjuk végre.

13. Éllistával adott egy irányított G gráf. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és 100 közötti egész szám (címke), több csúcsnak is lehet ugyanaz a címkéje. Találjunk (ha létezik) olyan *tarka* utat a gráfban, amelyben minden $1 \le i \le 100$ címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(m+n)$.

Megoldás: Vegyük észre először is, hogy egy pontosan 100 hosszú utat kell találnunk, amin a címkék az 1,2,3, $\ldots, 99, 100$ számok egy permutációját alkotják. Ilyen permutációból 100! van, ez konstans.

Minden lehetséges $i_1, i_2, \ldots, i_{100}$ permutációra csináljuk a következőt:

Átalakítjuk a gráfot úgy, hogy csak olyan irányított élek maradjanak benne, amik a permutációban egymást követő címkepárokhoz taroznak, azaz pontosan akkor marad meg egy x-ből y-ba vezető él, ha x címkéje éppen y előtt áll a permutációban.

Az új G_1 gráfban kell eldöntenünk, hogy van-e út valamelyik i_1 címkéjű csúcsból valamelyik i_{100} címkéjű csúcsba, ezt pedig a következőképpen tesszük meg: felveszünk egy új s csúcsot, amit összekötünk minden i_1 címkéjű csúccsal és ebben a G_2 gráfban futtatjuk DFS(G_2, s)-t. Ha van olyam i_{100} címkéjű csúcs, akit eközben elérünk, akkor létezik a keresett út, különben nem.

Ez az eljárás azért helyes, mert az élek törlése, majd az s csúcs beillesztése után keletkező G_2 gráfban éppen akkor érhető el egy i_{100} címkéjű csúcs, ha az eredeti G-ben van $i_1, i_2, \ldots, i_{100}$ címkéjű tarka út.

G_2 éllsitája elkészíthető $O(n+m)$-ben, a kapott gráfnak $n+1$ csúcsa van és legfeljebb $m+n$ éle, azaz a DFS lépésszáma $O(n+1+n+m)$, ami $O(n+m)$.

Mivel egy permutáció ellenőrzése $O(n+m)$ és konstans sok permutáció van, ezért az egész eljárás lépésszáma $O(n+m)$.