NP-teljesség

1. Mutassa meg, hogy az alábbi nyelvek NP-teljesek!

(a) az olyan G gráfokból álló nyelv, amelyek kiszínezhetőek 3 színnel úgy, hogy minden színt ugyanannyiszor használjuk.

(b) az olyan (G, a, b, k) négyesekből álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, $a, b \in V(G)$, $k > 0$ egész szám és G-ben van olyan út a és b között, aminek a hossza legalább k.

(c) az olyan (G, a, b) hármasokból álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, $a, b > 0$ egész számok és a G gráfnak van a $K_{a,b}$ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráfja.

(d) az olyan G irányítatlan gráfokból álló nyelv, amelyekre G-ben van olyan C kör, hogy minden $v \notin C$ csúcs össze van kötve éllel a C valamely csúcsával.

Megoldás: (a) Könnyen látszik, hogy ez az L nyelv NP-beli, tanú egy megfelelő színezés. Az NP-nehézség bizonyításához megadunk egy 3SZÍN $\prec L$ Karp-redukciót. Ha G egy v pontú gráf, akkor $G' = f(G)$ legyen az a gráf, amit G-ből $2v$ db izolált pont hozzávételével kapunk. Ez nyilván kiszámítható polinom időben. Ha G színezhető 3 színnel úgy, hogy az i-edik színt k_i-szer használjuk, akkor G' kiszínezhető 3 színnel a feltételeknek megfelelően a következő módon: G pontjait ugyanúgy színezzük, az izolált pontok közül pedig $v - k_i$-t színezünk az i-edik színnel. Ebben a színezésben egyrészt minden pontot kiszíneztünk, hiszen $v - k_1 + v - k_2 + v - k_3 = 3v - (k_1 + k_2 + k_3) = 2v$. Másrészt minden színt épp v-szer használtunk.

Ha viszont G' kiszínezhető 3 színnel a feltételeknek megfelelően, akkor ez megad egy jó színezést G pontjain.

(Formálisan a függvénynek azon szavakhoz is kell rendelni valamit, amik azért nincsenek benne a 3SZÍN *nyelvben, mert nem írnak le gráfot. Ha az ilyen x szavakra $f(x) = x$, az minden esetben megfelelő, hiszen $x \notin L$ is teljesülni fog. Ezért erre nem szükséges mindig külön kitérni.)*

(b) *Vázlatosan:* NP-beli, mert tanú egy ilyen út. NP-nehéz: Adunk egy HAMÚT $\prec L$ Karp-redukciót: G-hez adjunk 2 új pontot és ezek legyenek a és b, legyen $k = V(G) + 1$. Belátható, hogy ez teljesíti a feltételeket.

(c) Az, hogy ez az L nyelv NP-ben van egyszerűen látható a tanú tétel alapján: tanú lehet a megfelelő részgráf pontjainak felsorolása. Ez nyilván polinom hosszú, és polinom időben ellenőrizhető is, hogy a megadott pontok egy páros gráfot feszítenek.

Az NP-teljesség bizonyításához egy ismert NP-teljes nyelvet kell visszavezetni L-re. Itt mutatunk egy MAXFTL $\prec L$ Karp-redukciót. A MAXFTL bemenetei (G, k) alakúak, ahol G egy gráf, k pozitív egész. Készítsük el belőle a $(G', k, 2)$ bemenetet, ahol G' úgy keletkezik a G-ből, hogy hozzáveszünk 2 csúcsot, melyeket összekötünk G csúcsaival (de egymással nem). Ez polinom időben megoldható.

Vegyük észre, hogy ha G-ben van k független pont, akkor ezek és a két új pont egy feszített $K_{k,2}$ gráfot adnak G'-ben, azaz ha $(G, k) \in$ MAXFTL, akkor $(G', k, 2) \in L$. Másrészt, ha G'-ben van feszített $K_{k,2}$ és $k \geq 2$, akkor ennek a k oldala biztos, hogy az eredeti G-ben helyezkedik el, azaz van G-ben k független pont. (A $k = 1$ eset triviálisan eldönthető polinom időben, ilyenkor feleltessünk meg neki egy triviálisan L-ben levő bemenetet.)

(2 pont helyett elég 1 pontot hozzávenni, akkor a $K_{k,1}$ páros gráf, létezése a kérdés.)

(d) Az, hogy ez a nyelv NP-ben van világos, hiszen a nyelvbe tartozásra tanú egy megfelelő C kör csúcsainak a kör szerinti sorrendben való felsorolása. Ez polinom hosszú, és annak ellenőrzése, hogy a megadott pontok az adott sorrendben kört alkotnak, illetve, hogy minden további csúcs össze van kötve a kör egy pontjával ellenőrizhető $O(c + n^2) = O(n^2)$ lépésben (itt c a kör hossza, n a gráf csúcsainak száma).

Az NP-teljességhez mutatunk egy HAM $\prec L$ Karp-redukciót. Egy tetszőleges G gráfból készítsük el azt a G' gráfot, amiben G-t úgy egészítjük ki, hogy minden v_i csúcsához felveszünk egy új w_i csúcsot, amit összekötünk v_i-vel (és mással nem). Ezzel a csúcsok számát megdupláztuk, az új gráf szomszédossági mátrixa polinom időben előállítható. (Hogy néz ki az új mátrix?)

Ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor ez a kör olyan, amilyennek G'-ben lenni kell, tehát ha $G \in$ HAM, akkor $G' \in L$. Másrészt ha $G' \in L$, akkor a feltételnek megfelelő C kör nem tartalmazhat egyet sem a w_i pontokból mert ezek fokszáma 1, ahhoz meg, hogy ezek mindegyike össze legyen kötve a körrel, a C-nek az összes v_i-t tartalmaznia kell, azaz C egy Hamilton-kör G-ben, tehát ha $G' \in L$ akkor $G \in$ HAM teljesül.

2. Az alábbi problémák mindegyikében a bemenet egy $G(V, E)$ irányítatlan gráf és a gráf pontjainak egy $S \subseteq V$ részhalmaza. Határozza meg, melyik esetben kapunk P-beli, mikor NP-teljes problémát!

   (a) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G-ben, melyben S minden eleme levél?

   (b) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G-ben, melynek levelei pontosan az S-beli pontok?

   (c) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G-ben, melynek levelei az S-beli pontok közül valók?

   Megoldás: Csak vázlatosan:

   (a) Pontosan akkor lehet S minden eleme levél, ha S pontjait elhagyva van feszítőfa és ehhez az S-beli csúcsok egyenként csatlakoznak, azaz $G - S$ összefüggő és minden S-beli csúcsból van él egy nem S-belibe. Ez a tulajdonság ellenőrizhető polinom időben, tehát $L \in \mathrm{P}$.

   (b) Ez NP-teljes, hiszen ha $S = \{s, t\}$, akkor az a kérdés, van-e olyan feszítőfa, aminek csak két levele van s és t, azaz, hogy van-e s és t közötti Hamilton-út, ami egy NP-teljes probléma.

   (c) Itt tehát nem kell, hogy S minden eleme levél legyen. Ez viszont nem segít az előző esetben, amikor $S = \{s, t\}$, hiszen legalább két levele biztos van a fának. Tehát ez is NP-teljes.

3. Tekintsük azt a problémát, hogy egy adott G irányítatlan súlyozott gráfban mekkora a maximális súlyú út súlya! Adja meg, mi lesz az ehhez tartozó nyelv, és lássa be, hogy az NP-teljes!

   Megoldás: Egy eldöntési problémává kell átalakítani. Maximum-keresési feladatoknál ezt úgy jó csinálni, hogy azt kérdezzük, van-e elég nagy megoldás. Tehát az L nyelv az olyan (G, k) párokból álljon, ahol G egy irányítatlan súlyozott gráf, k egy szám és G-ben van olyan út melynek súlya legalább k.

   $L \in \mathrm{NP}$ mert tanú lehet egy jó út, pontosabban a pontjainak az út szerinti sorrendben való felsorolása. Ez polinom hosszú. Amit ellenőrizni kell, hogy valóban egy utat határoznak meg és hogy ennek összsúlya legalább k, ami megy polinom időben.

   Az NP-teljességhez visszavezetünk rá egy NP-teljes nyelvet: HAMÚT $\prec L$. Egy tetszőleges G gráfból úgy kapjuk a G' súlyozott gráfot, hogy minden él súlya legyen 1. Legyen $f(G) = (G', k)$, ahol $k = n - 1$ és n a G csúcsainak száma. Ez Karp-redukció, mert polinom időben számolható (a gráf mátrixán nem is kell változtatni, elég a k értékét kiszámolni). Továbbá világos, hogy pontosan akkor van Hamilton-út a gráfban ha van legalább $n - 1$ súlyú út G'-ben (igazából pontosan $n - 1$ súlyú lesz az út, mert ennél több élből nem állhat).

4. Egy n emberből álló szervezetben b féle bizottság működik. Bizottsági ülések időpontját akarjuk kitűzni. Két különböző bizottság ülése akkor lehet azonos napon, ha nincs olyan ember, aki mindkét bizottságnak tagja. Legyen adott egy k pozitív egész szám és minden bizottsághoz a tagok névsora. Azt szeretnénk eldönteni, hogy az összes bizottság ülése lebonyolítható-e k napon belül. Vagy adjon egy, a kívánt beosztást megtaláló polinomiális algoritmust, vagy mutassa meg, hogy a feladathoz tartozó nyelv NP-teljes.

   Megoldás: Ötlet: tekintsük azt a G gráfot, melynek csúcsai a bizottságok, kettő akkor legyen összekötve, ha van közös tagjuk. Így azoknak a bizottságoknak lehet egy napon az ülése, amelyek független halmazt alkotnak. Akkor elég k nap, ha k független halmazra felbonthatók a csúcsok, azaz a gráf kiszínezhető k színnel.

   Ez után nem nehéz egy visszavezetést adni a 3SZÍN nyelvről: a csúcsoknak feleljenek meg a bizottságok, minden élnek megfelel egy ember, aki pontosan abban a két adott bizottságban van benne, $k = 3$.

5. Bizonyítsa be, hogy ha $L_1 \prec L_2$ és $L_2 \in \mathrm{NP}$, akkor $L_1 \in \mathrm{NP}$.

   Megoldás: Ha $L_1 \prec L_2$, akkor van olyan M_1 DTG, ami $O(n^k)$ időben kiszámolja a redukció $f(x)$ függvényét. Mivel $L_2 \in \mathrm{NP}$, van olyan M_2 NTG, aminek nyelve L_2 és futásideje $O(n^l)$. Legyen M az a NTG, ami x inputon el?ször kiszámítja $f(x)$-et, majd $f(x)$-en futtatja M_2-t. A f tulajdonságai miatt világos, hogy M nyelve L_1, futásideje pedig $O(n^{kl})$ lesz. Ezért $L_1 \in \mathrm{NP}$.

6. Tudjuk, hogy $L_1 \prec L_2$ és hogy az L_2 komplementere Karp-redukálható a PARTÍCIÓ nyelvre. Igazolja, hogy ekkor $L_1 \in \mathrm{co\,NP}$!

   Megoldás: A második feltétel szerint $\overline{L_2} \prec$ PARTÍCIÓ, és mivel PARTÍCIÓ NP-teljes (és így NP-beli),

ezért $\overline{L_2} \in \mathrm{NP}$. Az első feltétel szerint $L_1 \prec L_2$, amiből $\overline{L_1} \prec \overline{L_2}$ következik. Ezért $\overline{L_1}$ is NP-ben van, ami a co NP definíciója miatt ekvivalens az $L_1 \in \mathrm{co\,NP}$ tulajdonsággal.

7. Igazolja, hogy léteznek az alábbi Karp-redukciók! (a) RH $\prec$ HAM (b) ÖSSZEFÜGGŐ $\prec$ 3SAT (c) ÖSSZEFÜGGŐ $\prec$ PÁROS

   (ÖSSZEFÜGGŐ az összefüggő gráfok nyelve, PÁROS meg a páros gráfoké)

   Megoldás: (a) RH $\in$ NP (sőt, NP-teljes), HAM NP-teljes, tehát a Karp-redukció az NP-teljesség definíciója miatt létezik.

   (b) ÖSSZEFÜGGŐ $\in$ P $\subseteq$ NP és 3SAT NP-teljes, tehát a Karp-redukció az NP-teljesség definíciója miatt létezik.

   (c) ÖSSZEFÜGGŐ $\in$ P és PÁROS $\in$ P is teljesül. Legyen a Karp-redukció a következő: ha az x bemenet nem gráf, akkor $f(x) = x$, különben pedig ellenőrizzük, hogy a megadott gráf összefüggő. Ha igen, akkor legyen $f(x)$ egy él, különben meg egy háromszög. Mivel az összefüggőség polinom időben eldönthető, ezért ez az f polinom időben számolható. Ha a gráf összefüggő, akkor a képe (egyetlen él) páros gráf, ha meg nem összefüggő, akkor a képe K_3, ami nem páros gráf.

8. Egy hivatal egy új, E emeletes épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy megoldható-e a költözés úgy, hogy egyetlen részleg se legyen kettévágva, azaz egy részleg teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Mi lesz a problémához tartozó nyelv? Ez a nyelv P-ben van vagy NP-teljes?

   Megoldás: A nyelv elemei: $(a_1, a_2, \ldots, a_n; E, T)$, ahol $a_i > 0$, $E > 0$, $T > 0$ egész számok, és az a_i számok szétoszthatók E csoportba, hogy minden csoport összege legfeljebb T. (Itt T a szintek területe, a_i-k az igények.)

   Ötlet: NP-teljes, pl. a PARTÍCIÓ visszavezethető rá, $E = 2$ esetén két emeletre kell elrendezni a „számokat”. A PARTÍCIÓ egy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bemenetéhez rendeljük az $(a_1, a_2, \ldots, a_n; 2, \lfloor \sum a_i/2 \rfloor)$ bemenetet.

9. P-beli vagy NP-teljes az a feladat, ahol adottak az $a_1, \ldots, a_n$ egész számok és az a kérdés, hogy ez a számhalmaz szétosztható-e három részre úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen?

   Megoldás: Megmutatjuk, hogy NP-teljes. Az, hogy NP-ben van világos, hiszen tanú lehet egy jó szétosztás (pl. $\Theta(n)$ bittel megadjuk melyik szám melyik osztályba kerüljön), amiről $\Theta(n)$ lépésben ellenőrizzük, hogy tényleg 3 felé osztás, és az összegek megegyeznek.

   A teljességhez megadunk egy PARTÍCIÓ $\prec L$ Karp-redukciót. A PARTÍCIÓ egy $b_1, b_2, \ldots, b_m$ bemenetéből ($b_i > 0$) képezzük az $a_i = b_i$ $(1 \le i \le m)$, $a_{m+1} = \sum b_i/2$ sorozatot, ha ez az összeg páros. (Így $n = m + 1$.) Ha az összeg nem páros, akkor legyen például $n = 3$, $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$. Ez polinom időben számolható. A b_i-k kétfelé osztása adja az a_i-knek egy 3 felé osztását (a 3. osztály egy elemű, az a_{m+1} van csak benne). Másrészt csak úgy lehet az a_i-ket 3 felé osztani, ha az a_{m+1} egymaga lesz, a másik két osztály meg a b_i-k egy jó partíciója.

10. Adjon Karp-redukciót a PARTÍCIÓ problémáról a RH problémára!

    Megoldás: Legyen $f : (s_1, s_2, \ldots, s_n) \mapsto (s_1, s_2, \ldots, s_n; b)$, ahol $b = \sum s_i/2$, ha ez a b egész szám, különben meg pl. $(2, 2; 1)$. Ez az f egy megfelelő Karp-redukció mert csak lineárisan sok összeadás kell hozzá, hogy a b-t kiszámoljuk, és az RH megoldása megegyezik a PARTÍCIÓ megoldásával.

11. Igazolja, hogy ha co NP $\neq$ NP, akkor MAXKLIKK $\notin$ P.

    Megoldás: Indirekt: Ha MAXKLIKK $\in$ P, akkor a komplementere is P-ben van, tehát MAXKLIKK $\in$ co NP. Viszont az NP-teljessége miatt minden $L' \in$ NP nyelvre teljesül, hogy $L' \prec$ MAXKLIKK, amiért $L' \in$ co NP is igaz. Tehát NP $\subseteq$ co NP.

    Ha most $L'' \in$ co NP, akkor a definíció miatt $\overline{L''} \in$ NP, amiből az előbb kapott tartalmazás szerint $\overline{L''} \in$ co NP is következik, tehát $L'' \in$ NP.

A feltevésünkből ezek szerint az $\mathrm{NP} = \mathrm{co\,NP}$ is következik, ami ellentmond a feladatnak.

12. Igazolja, hogy ha egy X eldöntési probléma NP-teljes és $X \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{co\,NP}$, akkor $\mathrm{NP} = \mathrm{co\,NP}$.

    Megoldás: Mivel X NP-teljes ezért minden $L \in \mathrm{NP}$ probléma esetén $L \prec X$, amiből $X \in \mathrm{co\,NP}$ miatt $L \in \mathrm{co\,NP}$ jön, tehát $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{co\,NP}$.

    A fordított irányú tartalmazást hasonlóan láthatjuk be, mint az előbb: tetszőleges $L \in \mathrm{co\,NP}$ problémára teljesül, hogy $\overline{L} \in \mathrm{NP}$, tehát $\overline{L} \prec X$ az X NP-teljessége miatt, amiből $\overline{L} \in \mathrm{co\,NP}$ következik. Tehát $L \in \mathrm{NP}$, azaz $\mathrm{co\,NP} \subseteq \mathrm{NP}$, és így $\mathrm{NP} = \mathrm{co\,NP}$

13. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami egy tetszőleges Boole-formuláról polinom időben eldönti, hogy a SAT nyelvnek eleme vagy nem. Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben megtalálni egy adott $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ formulához a változóknak egy olyan értékelését, amelyet ha a φ-be behelyettesítünk, akkor a formula értéke igaz lesz?

    Megoldás: Először adjuk be az eljárásnak magát a φ formulát. Ha a válasz az, hogy nincs megoldás, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben legyen $i = 1$ és helyettesítsünk x_i helyébe hamis értéket. Legyen φ_0 az a formula, amit így φ-ből kapunk. Adjuk oda ezt az eljárásnak. Ha a válasz az, hogy továbbra is van megoldás, akkor legyen $\varphi = \varphi_0$, különben pedig $\varphi = \varphi_1$, ahol az utóbbi azt jelzi, amit az x_i helyébe igazat behelyettesítve kapunk. (Vegyük észre, hogy ha φ_0 nem, akkor φ_1 biztos kielégíthető.) Hajtsuk végre ugyanezt az $i = 2, 3, \ldots, n$ választással.

    Ezen a módon a változóknak sorban értéket adunk. Mivel minden i esetén x_i-nek olyan értéket választunk, amihez a hátralevő változók megválaszthatók úgy, hogy a formula igaz legyen, a végén, amikor minden változót rögzítettünk, az érték igaz lesz.

    Lépésszám: legyen az eredeti eljárás lépéspészáma az n változós formulákon $O(n^c)$. Ezt n-szer hívjuk meg, mindig legfeljebb n változós formulára. Ezért a lépésszáma $O(n^{c+1})$.

    Megjegyzés: lehet, hogy az eredeti formulához több jó kiértékelés is van, ez a módszer ezekből egyet fog megtalálni, a lexikografikusan legelsőt.

14. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami egy tetszőleges n csúcsú gráfról polinom időben megmondja, hogy van-e benne Hamilton-kör. Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben megtalálni egy adott G gráfban egy Hamilton-kört?

    Megoldás: Először adjuk be az eljárásnak a G gráfot. Ha az a válasz, hogy nincs benne Hamilton-kör, akkor készen vagyunk.

    Különben legyenek a G gráf élei $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Az $i = 1, 2, \ldots m$ értékekre sorban csináljuk a következőt:

    Hagyjuk el a gráfból az f_i élet, jelölje a kapott gráfot G'. Adjuk be ezt a gráfot az eljárásnak. Amennyiben az a válasz, hogy van benne Hamilton-kör, akkor $G = G'$-vel folytatjuk az eljárást. Ha nincs benne, akkor viszont nem változtatjuk meg G-t.

    Vegyük észre, hogy az aktuális G-ben mindig lesz Hamilton-kör, de elhagyunk minden élet, ami ehhez „nem fontos”. A végén a gráfban kizárólag egy Hamilton-kör élei maradnak meg, így itt már könnyű ezt ,,megtalálni”.

    Lépésszám: Legyen az eredeti eljárás lépésszáma az n csúcsú gráfokon $O(n^c)$. Ezt m-szer hívjuk meg, $m < n^2$. Egy él elhagyása megoldható $O(n)$ lépésben, tehát az egész együtt $O(m(n^c + n))$, azaz polinomiális.

    Megjegyzés: Lehet, hogy eredetileg több Hamilton-kör is van a gráfban. Mindig azt ellenőrizzük, hogy marad-e az f_i elhagyása után is Hamilton-kör, és ha igen, akkor egy kevesebb élű gráffal folytatjuk.