NP teljesség

1. Bizonyítsa be, hogy az alábbi nyelvek co NP-beliek!

   (a) Az olyan páros gráfok nyelve, amelyekben van teljes párosítás.

   (b) Az olyan gráfok nyelve, amelyekben van teljes párosítás.

   (c) A síkbarajzolható gráfok nyelve.

   (d) Az olyan gráfok nyelve, amelyekben akárhogyan színezzük ki az éleket 2 színnel, mindig keletkezik egyszínű háromszög.

   *Megoldás:* Mindegyik esetben azt kell megmutatni, hogy a nyelv komplementere NP-ben van. Ehhez a tanú tétel értelmében elegendő egy hatékony tanúsítványt mutatnunk a komplementer nyelvre, ami lényegében azt jelenti, hogy a nyelvbe nem tartozáshoz kell rövid tanú és ezt ellenőrző polinom idejű eljárás.

   (a) A nyelv polinom időben felismerhető, ennek bizonyítása is jó megoldás, de itt most, a gyakorlás kedvéért, egy tanút mutatunk a komplementerre.

   Arra, hogy egy páros gráfban nincs teljes párosítás tanú egy olyan $X$ ponthalmaz, ami megsérti a Hall-feltételt. Ha megadjuk a pontoknak egy ilyen részhalmazát, akkor ellenőrizni kell, hogy ezek a pontok mind a páros gráf egyik pontosztályából kerültek ki. A szomszédaik meghatározásának lépésszáma $O(n^2)$, és ennyi időben azt is ellenőrizni tudjuk, hogy a számuk valóban több mint $|X|$. Amennyiben van teljes párosítás a gráfban, akkor világos, hogy ilyen $X$ nem létezik.

   Szigorúan véve a nyelv komplementerébe azok a bemenetek is beletartoznak, amelyek nem páros gráfot írnak le. Ilyenkor az üres szó is megfelel tanúnak, hiszen polinom időben meg tudunk győződni róla, ha egy gráf nem páros gráf (BFS), és arról is, ha a bemenet nem gráfot ír le (mert nem négyzetszám hosszú 0/1 sorozat vagy a megfelelő mátrix nem lenne szimmetrikus – nem irányítatlan a gráf).

   A későbbiekben ilyen esetekben a nem megfelelő alakú bemenet (tehát nem gráf vagy ha irányítatlan gráf kellene, akkor nem ilyet leíró) esetére általában nem fogunk kitérni. Ezek az előbb vázolt módon egyszerűen kezelhetők.

   (b) A Hall-tétel helyett itt a Tutte-tételt kell alkalmazni: arra, hogy nincs teljes párosítás tanú egy olyan $X$ ponthalmaz, hogy ezt elhagyva a gráfból, a megmaradt részben a páratlan pontszámú komponensek száma több, mint $|X|$. Tehát $L_1$ állhat a $(G, x)$ párokból, ahol $x$ az $X$ halmaz pontjainak felsorolása, aminek $n$ csúcsú gráf esetén a hossza $O(n \log n)$. Az $L_1$-be tartozáshoz ellenőrizni kell, hogy $x$ a gráf $k$ különböző csúcsának a felsorolása. Az elhagyásukkal keletkező gráf (mátrixa) polinom időben megkonstruálható. Ennek a maradék gráfnak a komponensei (és azok mérete) egy szélességi bejárással polinom időben meghatározhatók, és innen a Tutte-tételbeli feltétel ellenőrizhető.

   Azt is tudjuk, hogy ha van teljes párosítás akkor nincs megfelelő $x$.

   (c) Itt a Kuratowski-tételt használjuk: tanú a gráfban található $K_5$ vagy $K_{3,3}$ gráf csúcsai és annak leírása, hogy ezek éleinek a gráfban mely utak felelnek meg. (Kizárólag a pontok megadása nem elég, mert nagyon sokféle út lehet közöttük.) Amit az $L_1$-be tartozás során ellenőrizni kell: ezek tényleg utak az eredeti gráfban, a gráf minden csúcsa legfeljebb az egyikhez tartozik, és persze, hogy valóban az egyik Kuratowski-gráf leírásával van dolgunk. Ez polinom idejű eljárással megvalósítható.

   Tudjuk, hogy ha a gráf síkbarajzolható, akkor nincs jó tanú.

   (d) Nézzük a komplementer tulajdonságot: a gráf éleihez lehet úgy két színt rendelni, hogy minden háromszögben mindkét szín előforduljon. Erre tanú egy megfelelő színezés, amit $O(n^2)$ bittel leírhatunk ($n$ a gráf csúcsainak száma). A gráfbeli összes háromszög ellenőrzése $O(n^3)$ lépés, ezért $L_1 \in \mathrm{P}$. (A nyelv komplemetere az előbb megadott tulajdonságú gráfokból és a nem gráfot leíró bemenetekből áll, de ez utóbbi eset a korábbiak szerint kezelhető, hiszen felismerhető polinom időben.)

2. Álljon a nyelv az olyan $(G, t)$ párokból, ahol $G$ egy súlyozott, irányítatlan gráf, $t > 0$ egész, és $G$-ben minden, $t$ darab élből álló párosítás súlya legalább $t^2$. Igazolja, hogy ez a nyelv co NP-ben van!

   *Megoldás:* A komplementer tulajdonság: a gráfban van olyan $t$ élű párosítás, melynek súlya kisebb, mint $t^2$. Ehhez tanú egy ilyen párosítás, amihez $2t$ csúcsot kell megadni. Ennek hossza $\Theta(t \log n) \subset O(n^2)$, mert

$t < n$ kell legyen. Amit az $L_1$-be tartozáshoz ellenőrizni kell: ez valóban $2t$ különböző csúcsa a gráfnak, a megfelelő élek a gráfban szerepelnek és ki kell számolni a súlyaik összegét, ami kisebb kell legyen, mint $t^2$. Ezek mindegyike megvalósítható $O(t) \subseteq O(n)$ lépésben, tehát az eljárás polinomiális.

3. Legyen $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ olyan polinom időben kiszámolható, bijektív függvény, aminél minden $x \in \{0,1\}^*$ szóra teljesül, hogy $|f(x)| = |x|$. Legyen $L = \{y :$ van olyan 1-gyel kezdődő $x$ amire $f(x) = y\}$. Igaz-e, hogy $L \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{co\,NP}$? (Az inverz nem feltétlenül polinomiális!)

   *Megoldás:* A függvény bijektív, tehát van inverze, de ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy ezt az inverzet polinom időben ki is tudjuk számolni.

   Azt viszont, hogy $L \in \mathrm{NP}$ elég egy megfelelő tanúsítvánnyal igazolni. Legyen $L_1 = \{(y, 1z) : f(1z) = y\}$. Ekkor az $x = 1z$ tanú hossza a feltétel szerint $|y|$, az ellenőrzése pedig az $f(x)$ kiszámolásából áll, ami polinomiális.

   A co NP-beliséghez az $L_0 = \{(y, 0z) : f(0z) = y\}$ nyelv használható, mert a feltétel miatt, ha $f(0z) = y$, akkor nincs másik $t$ szó, amire $f(t) = y$.

4. S-T-HAMÚT jelöli az olyan $(G, s, t)$ hármasokból álló nyelvet, ahol a $G$ irányítatlan gráf $s$ és $t$ csúcsa között van Hamilton-út. Igazolja, hogy az alábbi nyelvekre az S-T-HAMÚT nyelvről van Karp-redukció!

   (a) HAMÚT: a Hamilton-úttal rendelkező gráfok nyelve

   (b) HAM: a Hamilton-körrel rendelkező gráfok nyelve

   *Megoldás:* Vegyük észre, hogy a feladat nem kéri, hogy adjunk meg Karp-redukciót, elegendő a létezését megmutatni!

   HAMÚT és HAM is NP-teljes, az NP-teljesség definíciója miatt elegendő belátni, hogy S-T-HAMÚT $\in$ NP. Ez azért teljesül, mert jó tanú egy $s$-ből $t$-be vezető út csúcsainak felsorolása az út szerinti sorrendben. Egy ilyen tanú hossza $O(n \log n) \subset O(n^2)$, ami polinomiális ($n$ a gráf csúcsainak száma). Az ellenőrzése meg abból áll, hogy valóban a gráf különböző csúcsait soroltuk fel, melyek közül az első az $s$, az utolsó a $t$, és a felsorolásban szomszédos csúcsok között van él, ami a felsorolás hosszában lineáris, azaz a bemenet hosszában polinomiális lépésben megoldható.

5. Adjon meg egy HAM $\prec$ S-T-HAMÚT Karp-redukciót!

   *Megoldás:* Egy tetszőleges $G(V, E)$ gráfhoz készítsük el a $(G', s, t)$ hármast a következőképpen: Válasszuk ki egy csúcsát $G$-nek, ez lesz $s$. A $G'$ csúcshalmazát egészítsük ki egy új elemmel, $V' = V \cup \{t\}$. A $G'$-ben megtartjuk a $G$ éleit, az új $t$ csúcs szomszédai egyezzenek meg az $s$ szomszédaival, $E' = E \cup \{\{t, v\} : \{s, v\} \in E\}$. Ez a konstrukció polinom időben elvégezhető (a mátrixhoz egy új sort és oszlopot kell hozzávenni, amelyek megegyeznek $s$ sorával, oszlopával). Ez sajnos nem fog működni egy elfajuló esetben: ha $G$ 1db él. Ehhez rendeljük inkább a 2 izolált pontból álló gráfot vagy egy olyan szót, ami nem gráfot ír le. (Formálisan minden nem gráfot leíró szóhoz is kell rendelni valamit, legyen ez önmaga. De ezzel nem szoktunk foglalkozni, mert mindig ezt kell csinálni.)

   Még azt kell megmutatni, hogy $G \in \mathrm{HAM} \Leftrightarrow (G', s, t) \in$ S-T-HAMÚT. Ha $G \in \mathrm{HAM}$, akkor ha $G'$-ben elkezdjük ezt a Hamilton-kört $s$-ből követni de az utolsó éllel nem $s$-ben bezárjuk, hanem a megfelelő új éllel $t$-be lépünk, akkor a $G'$ egy $s$-ből $t$-be vivő Hamilton-útját kapjuk. Visszafelé pedig, a $G'$ egy $s$ és $t$ pontot összekötő Hamilton-útjából úgy kaphatjuk $G$ egy Hamilton-körét, ha az út utolsó éle helyett a neki megfelelő éllel az $s$-be lépünk $G$-ben.

6. Adjon meg egy HAM $\prec$ HAMÚT Karp-redukciót!

   *Megoldás:* Ugyanaz, mint az előző, csak az $s$,$t$-hez még csatlakoztassunk egy-egy elsőfokú pontot.

7. Adjon meg egy HAMÚT $\prec$ HAM Karp-redukciót!P

   *Megoldás:* Egy tetszőleges $G(V, E)$ gráfhoz készítsük el a $G'$ gráfot: Adjunk huzzá egy új pontot $G$-hez és kössük össze minden pontjával. Könnyen látszik, hogy ez teljesíteni fogja a követelményeket.

8. Igazolja, hogy az a nyelv, ami az összes olyan $M$ determinisztikus véges automata leírásából áll, melyre $L(M) \neq \emptyset$ teljesül, NP-ben van.

*Megoldás:* Arra, hogy $L(M) \neq \emptyset$ egy tanú lehet egy $x \in L(M)$. Az ellenőrzés lépésszáma $O(|x|)$. Azt kell még meggondolni, hogy van olyan $x \in L(M)$, amire $|x|$ polinomiális az automata leírásának hosszában, azaz, hogy ha a nyelv nem üres, akkor van rövid eleme. Ehhez vegyük észre, hogy ha $x \in L(M)$ egy legrövidebb szó, akkor a neki megfelelő állapotátmenetek sorozatában nem ismétlődhet állapot (különben az ismétlődések közötti rész kihagyható lenne a szóból). Ez viszont azt jelenti, hogy $|x|$ kisebb, mint az állapotok száma, tehát polinomiális (valójában lineáris).

Megjegyzés: igazából ez a nyelv P-ben is benne van: azt kell eldönteni, hogy az automatában a kezdő állapotból elérhető egy elfogadó állapot, ami egy, a gráfon végrehajtott bejárással megoldható.

9. Igazolja, hogy 2SZÍN $\prec$ 3SZÍN és hogy 3SZÍN $\prec$ 100SZÍN ! Mit mondanak ezek a Karp-redukciók a 3 nyelv bonyolultságáról?

*Megoldás:* Kezdjük a végén! A felírt állítások intuitív jelentése az, hogy a 3SZÍN legalább olyan nehéz, mint a 2SZÍN és legfeljebb olyan nehéz, mint a 100SZÍN.

Pontosabban, az első nem ad újat ahhoz képest, hogy tudjuk, a 2 színnel színezhetőség polinom időben eldönthető, a 3 színnel színezhetőség pedig NP-teljes. A második Karp-redukció, ha még azt is meggondoljuk, hogy a 100SZÍN nyelv NP-ben van, akkor azt mutatja, hogy ez a nyelv is NP-teljes (azaz általában a 100 színnel színezhetőség se nem könnyebb. se nem nehezebb a 3 színnel színezhetőségnél).

Tudjuk, hogy 2SZÍN $\in$ P $\subseteq$ NP és hogy a 3SZÍN nyelv NP-teljes. Az NP-teljesség definíciójából következik az első Karp-redukció létezése.

A másodikhoz módosíthatjuk az előadáson látott 3SZÍN $\prec$ 4SZÍN bizonyítást. Tetszőleges $G$ gráfból úgy készül $f(G) = G'$, hogy a csúcshalmazt kiegészítjük 97 további csúccsal, ezek legyenek összekötve $G$ minden csúcsával és egymással is. Ezzel egy polinom időben számolható $f$ függvényt definiáltunk, $G$ szomszédossági mátrixát kiegészítjük 97 további sorral, oszloppal, az új, nem diagonális elemek mind 1-ek.

Ha $G \in$ 3SZÍN, akkor $G'$-re egy ilyen színezés kiterjeszthető: az új csúcsok az eddigiektől és egymástól is különböző színt kapnak, amihez összesen 100 szín elég. Másrészt, ha $G' \in$ 100SZÍN, akkor egy jó színezésében a $G$ csúcsai legfeljebb 3 színnel vannak színezve, tehát ilyenkor valóban $G \in$ 3SZÍN.

Ha precízek akarunk lenni, a Karp-redukció értékét minden bemenetre, a nem gráfokra is meg kell adni. Könnyű látni, hogy ha $f$ nem változtat az ilyen bemeneten, az jó lesz mivel ilyenkor biztos, hogy a bemenet nem gráf, így se a 3SZÍN, se a 100SZÍN nyelvben nincs benne. Az meg, hogy ez az eset áll fenn, polinom időben eldönthető. Tehát az $f$ számolása azzal kezdődik, hogy ellenőrzi, hogy a kapott $x$ bemenet gráfot ad meg vagy sem, ha nem, akkor $f(x) = x$, különben meg a fent leírt módon módosított gráf lesz $f$ értéke.

1. Megjegyzés: a 2SZÍN $\prec$ 3SZÍN igazolására is használhattuk volna a 3SZÍN $\prec$ 4SZÍN visszavezetésnél látott konstrukciót.

2. Megjegyzés: Mivel általában annak ellenőrzése, hogy a bemenet egy gráf (vagy általában az, hogy formailag jó) általában megy polinom időben, ezért $f$-et sokszor csak a formailag jó bemeneteken adjuk meg.

10. Az $L$ nyelv az olyan $G$ egyszerű gráfokból áll, melyeknél a csúcsok színezéséhez kell legalább 4 szín. Igazolja, hogy a PRÍM $\prec L$ Karp-redukció létezik!

*Megoldás:* A PRÍM $\prec L$ Karp-redukció létezéséhez elegendő megmutatni, hogy a komplementerek között van Karp-redukció, $\overline{\text{PRÍM}} \prec \overline{L}$. Tudjuk, hogy $\overline{\text{PRÍM}}$ = ÖSSZETETT $\in$ NP. Azt fogjuk belátni, hogy $\overline{L}$ egy NP-teljes nyelv, és akkor az NP-teljesség definíciója miatt készen vagyunk. Ehhez elegendő azt észrevenni, hogy a „kell legalább 4 szín” komplementer tulajdonsága az, hogy „3 szín elég”, azaz lényegében a 3SZÍN nyelvről van szó, ami valóban NP-teljes.

Kicsit pontosabban, $\overline{L}$ a 3SZÍN nyelvnek és a nem gráfokat leíró bemeneteknek az uniója, amire a 3SZÍN nyelv könnyen Karp-redukálható úgy, hogy először ellenőrizzük, hogy a bemenet gráfot ír le. Ha nem, akkor megfeleltetjük neki a 4 pontú teljes gráfot, amihez nyilván kell 4 szín, egyébként meg, ha gráfot ír le, akkor saját magát.

Megjegyzés: A komplementer nyelv helyett általában elegendő a komplementer tulajdonsággal foglalkozni, hiszen az ez által meghatározott nyelv csak a formálisan nem jó bemenetekben különbözik a komplementer nyelvtől.

11. Tegyük fel, hogy $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ és $L_1 \in \mathrm{P}$. Lehetséges-e, hogy

(a) egy NP-teljes $L_2$ nyelvre $L_1$ Karp-redukálható?

(b) egy NP-teljes $L_2$ nyelv Karp-redukálható $L_1$-re?

(c) az $L_1$ nyelv NP-beli?

*Megoldás:* (a) $L_1 \in \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, tehát az NP-teljesség definíciója miatt biztos, hogy $L_1 \prec L_2$.

(b) Ha $L_2 \prec L_1$ és $L_2$ NP-teljes, akkor $L_1$ is az, mivel $L_1 \in \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$. Ebből $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ következne, tehát a feltevés miatt ez nem lehetséges.

(c) Mivel $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, ezért $L_1 \in \mathrm{NP}$ biztosan igaz.