# Keresőfák

1. Igazolja, hogy nincs olyan összehasonlításokkal rendező algoritmus, amelynél akármi is a bemenet, minden elem legfeljebb 2000 összehasonlításban szerepel!

   *Megoldás:* Ha minden elem legfeljebb 2000 összehasonlításban szerepel, akkor az algoritmus az $n$ elemmel összesen $2000n/2$ összehasonlítást végez. De tudjuk, hogy minden algoritmusnak kell legalább $\log n! = \Omega(n \log n)$ összehasonlítás, és $1000n \notin \Omega(n \log n)$, tehát valóban nincs ilyen algoritmus.

2. Adjon egy $O(n)$ időigényű algoritmust $n$ olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az
   (a) $\{1, \ldots, 3n\}$ halmazból vannak!
   (b) $\{1, \ldots, n^3 - 1\}$ halmazból vannak!

   *Megoldás:* (a) Használjunk ládarendezést $3n$ ládával! Ekkor a lépésszám $O(n + 3n) = O(n)$.

   (b) Az egyszerű ládarendezés itt nem elég, használjuk a radix rendezést! Képzeljük el a számokat az $n$ alapú számrendszerben felírva. Ekkor mindegyik (legfeljebb) 3 jegyű. Ha ebben az alakban használjuk a radix rendezést, akkor 3 ládarendezés kell, mindegyiknél $n$ láda, tehát az egész valóban $O(n)$ lépést használ.

   Megjegyzés: Az $n$ alapú számrendszerbe való átírás is megoldható $O(n)$ aritmetikai művelettel, hiszen minden számot maradékosan el kell osztani $n$-nel, a maradék adja az utolsó jegyet, a hányadost újra elosztjuk $n$-nel, az itteni maradék adja a következő számjegyet, a hányados meg az elsőt.

3. A $G = (V,E)$ többszörös élet nem tartalmazó irányított gráf csúcshalmaza legyen $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Tegyük fel, hogy a gráf olyan éllistával adott, amelyben minden csúcsnál a szomszédok tetszőleges sorrendben vannak felsorolva. Adjon algoritmust, ami $O(|V|+|E|)$ lépésben olyan éllistát hoz létre, amiben a szomszédok minden csúcsnál növekvő sorrendben vannak!

   *Megoldás:* Adódna a ládarendezés, de ha minden csúcsra külön végrehajtjuk ($|V|$ ládával), akkor egy $d$-fokú csúcsnál $O(d + |V|)$, összesen $O(|E| + |V|^2)$ lesz a lépésszám, ami túl sok lehet.

   Ezért inkább az éllista alapján soroljuk fel az éleket $(i, j)$ alakban. Ha ezeken egy radix rendezést hajtunk végre, akkor pont a kívánt sorrendben lesznek az élek, amiből a rendezett éllista már egyszerűen felírható. A lépésszám így: az élek felsorolása, illetve az új éllistába beírásuk $O(|V| + |E|)$, a rendezés, mindkétszer $|V|$ ládát használva, $O(|E| + 2|V|)$, tehát összesen is $O(|E| + |V|)$.

   2. megoldás: Rendezés helyett fordítsuk meg kétszer a gráfot. A megfordítás úgy történjen, hogy az éllistán végigmenve, amikor épp az $i$ csúcs $j$ szomszédjánál tartunk, akkor egy új éllistában a $j$ csúcshoz írjuk be az $i$-t, mint szomszédot. Világos, hogy ezzel a fordított gráf éllistáját már rendezetten kapjuk. és ezért a második megfordítás után, amikor visszakapjuk az eredeti gráf éleit, annak az éllistája is rendezett lesz.

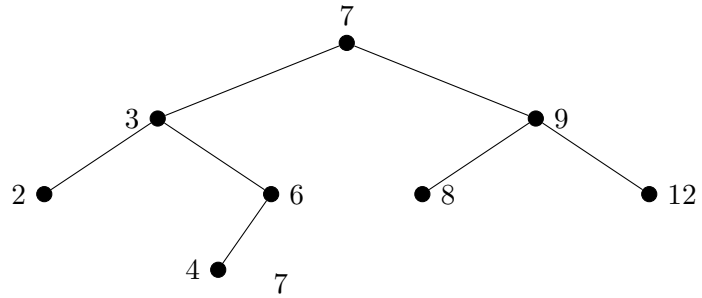
   A megfordítás során csak kiolvassuk és beírjuk az éleket, tehát ennek lépésszáma arányos az éllista méretével, tehát $O(|E| + |V|)$.

4. Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Mely $x$ egész számokra lehetséges, hogy egy KERES($x$) hívás során a keresési út mentén a 20, 18, 3, 15, 5, 8, 9 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben?

   *Megoldás:* Nyilván a 20 van a fa gyökerében. Mivel utána a $18 < 20$ jön majd, nyilván balra léptünk, azaz $x < 20$. Hasonlóan a $3 < 18$ miatt megint balra léptünk, tehát $x < 18$. Ekkor egy 3-nál nagyobb szám következett, tehát $x > 3$, és így tovább, $x < 15$, $x > 5$, $x > 8$. Összegezve, biztos teljesül, hogy $8 < x < 15$. Azaz $x = 9, 10, 11, 12, 13, 14$ mindegyike lehet, az első esetben a keresés sikeres volt, a többiben nem.

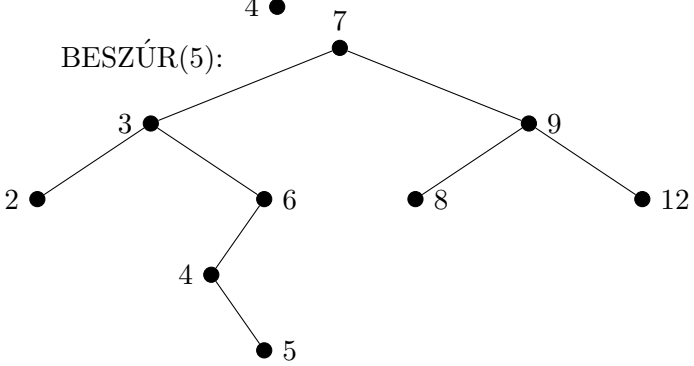
5. (a) Építsen beszúrásokkal bináris keresőfát az alábbi sorrendben érkező számokból: 7, 3, 2, 9, 8, 12, 6, 4.
   (b) Járja be pre-. in-, és posztorder bejárással a kapott fát!
   (c) Az (a) rész keresőfáján hajtsa végre az alábbi műveletsort: BESZÚR(5), TÖRÖL(2), TÖRÖL(7), TÖRÖL(6).

   *Megoldás:* A végeredmény ez lesz:

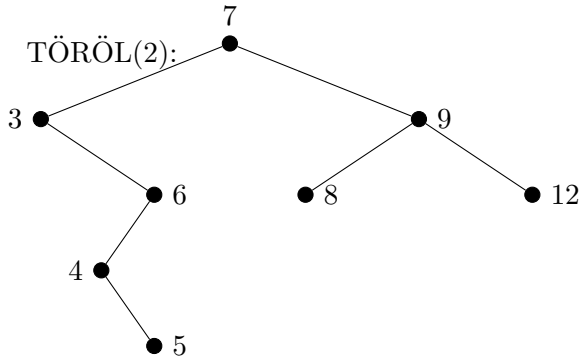



preorder: 7, 3, 2, 6, 4, 9, 8, 12
inorder: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12
posztorder: 2, 4, 6, 3, 8, 12, 9, 7

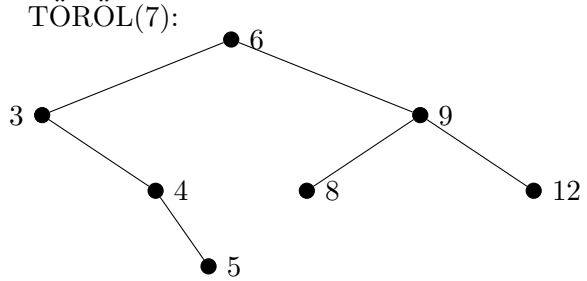
BESZÚR(5):



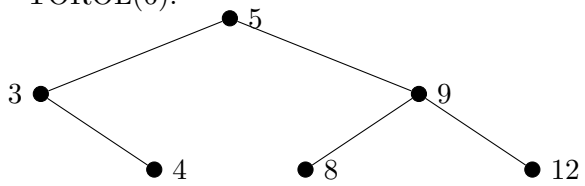

TÖRÖL(2):




TÖRÖL(7):




TÖRÖL(6):




6. Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak megcímkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a posztorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3, $x$, 7, 5, $y$, 2. Mi lehet az $x$ és mi az $y$?

   *Megoldás:* Látszik, hogy a második listából a 6 és a 8 hiányzik, ezek egyike az $x$, a másik az $y$.

   Próbáljuk rekonstruálni a fát! A posztorder utolsó eleme a fa gyökere, tehát ez a 2. Az inorderben a 2 előttiek vannak a bal részfában, a 2 utániak a jobban. A 2 gyerekeit megint a posztorderból olvashatjuk ki, a 3 a bal oldalra került elemek közül az utolsó, tehát ez a 2 bal gyereke, a jobb pedig az $y$. Az $y$ értékétől függetlenül a 7 az $y$ bal részfájában lesz, hiszen az indorder sorrendben megelőzi. Nem lehet $y = 6$, mert akkor az inorder sorrend szerint a bal részfája csak a 7-ből állna, és nem állhatna a posztorder sorrendben előtte az $x$. Tehát csak $x = 6$ és $y = 8$ lehet. Ez pedig valóban egy jó megoldás, a 2 jobb gyereke az $y = 8$, ennek két fia a 7 és az 5, a 7-nek valamelyik oldali gyereke a 6.

   Megjegyzés: ha látni akarjuk, hogy ez tényleg jó megoldás, azt is ellenőrizni kell, hogy a bal részfa sorrendjei sem mondanak ellent egymásnak.

7. Határozza meg azokat a bináris fákat, amelyekben a preorder bejárás szerinti sorrend éppen a posztorder bejárás által adott sorrend fordítottja!

   *Megoldás:* Ha egy csúcsnak két gyereke van, akkor ezek sorrendje ugyanaz a preorder és a posztorder bejárás szerint is. Tehát a fa egyetlen út lehet csak (nincs benne elágazás). Ebben az esetben pedig függetlenül attól, hogy az a gyerek melyik oldalon van, a preorder a fán lefelé haladva sorolja fel az elemeket, a posztorder meg felfelé.

8. Az $A$ keresőfában $n$ egész számot, a $B$-ben pedig $m$-et tárolunk. Rendezzük az $n + m$ elemet $O(n + m)$ lépésben!

   *Megoldás:* Tudjuk, hogy az inorder bejárás növekvő sorrendben adja meg a tárolt elemeket. Olvassuk így ki mindkét fából a tárolt számokat, és a két növekvő listát fésüljük össze. A kiolvasás (bejárás) lépésszáma arányos a fa méretével, az összefésülés $n+m-1$ összehasonlítást és $n+m$ mozgatást igényel, összesen tehát a lépésszám $O(n + m)$.

9. Igazolja, hogy minden olyan algoritmus, ami csak összehasonlításokkal fel tud építeni egy bináris keresőfát $n$ elem esetén $\Omega(n \log n)$ összehasonlítást használ!

   *Megoldás:* Mivel egy bináris keresőfából az elemek növekvő sorrendjének előállításához már nem kell további összehasonlítás (csak az inorder bejárás), ezért az összes szükséges összehasonlítás a fa elkészítésekor történik. A rendezéshez kell $\Omega(n \log n)$ összehasonlítás, tehát a fa építéséhez is szükség volt ennyire.

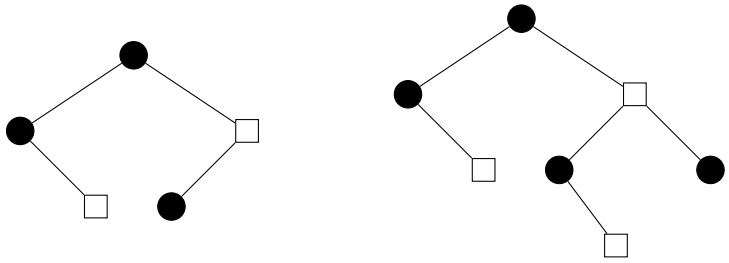
10. Adott egy $n$ csúcsú bináris keresőfa, melyben csupa különböző elemeket tárolunk. Ennek minden $v$ csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a $v$ gyökerű részfában hány darab $v$-nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot $O(n)$ lépésben megoldja!

    *Megoldás:* Egy keresőfa $v$ gyökerű részfájában $v$-nél kisebb elemek csak a $v$ bal részfájában lehetnek, a feladatunk minden csúcsra a bal részfa méretének meghatározása. Helyette dinamikus programozással határozzuk meg minden $v$ csúcsra a bal részfa $B[v]$ és a jobb részfa $J[v]$ méretét is! Posztorder sorrendben menjünk végig a csúcsokon. Ha $v$ levél, akkor $B[v] = J[v] = 0$. Ha $v$ nem levél és $x$ a bal, $y$ a jobb gyereke, akkor $B[v] = B[x] + J[x] + 1$ és $J[v] = B[y] + J[y] + 1$. Amennyiben $x$ vagy $y$ nem létezik, akkor $B[v]$ vagy $J[v]$ értéke 0.

    Végül a $B[v]$ értékekre van szükségünk.

    A lépésszám: a bejárás lineáris, minden csúcsnál konstans sok további műveletet végzünk, ezért összesen $O(n)$.

11. Lehetséges-e hogy az alábbi ábrákon egy-egy piros-fekete fa csúcsait ábrázoltuk? (A levelek nincsenek feltüntetve, a fekete kör fekete csúcsot, a fehér négyzet piros csúcsot jelöl.)



    *Megoldás:* Az első esetben nem, mert a jobb oldali piros csúcsnál egyik irányban (a levéllel együtt) 2, a másik irányban csak 1 fekete csúcs van.

    A második lehetséges, minden tulajdonság teljesül.

12. Egy piros-fekete fában valamelyik, a gyökértől egy levélig vezető úton sorban az alábbi színű csúcsok vannak: fekete, piros, fekete, fekete. Mennyi a fában tárolt elemek számának a minimuma?

    *Megoldás:* 5.

13. Mennyi a tárolható elemek számának minimuma, illetve maximuma egy olyan piros-fekete fában, aminek a fekete magassága 3?

    *Megoldás:* Tudjuk, hogy a nem levél csúcsok száma legalább $2^3 - 1 = 7$, legalább ennyi elemet tárol a fa. Ha a fában csak fekete csúcsok vannak, akkor épp 7 elemet tud tárol, tehát 7 a minimum.

    Azt is tudjuk,hogy a magassága legfeljebb $2 \cdot 3 = 6$, egy 6 magas fában pedig legfeljebb $2^6 - 1 = 63$ elem tárolható. Ezt el is lehet érni, ha váltakozva a szintek feketék és pirosak.

14. Egy piros-fekete fában jelölje $x$ és $y$ a gyökér két fiát. Tudjuk, hogy $fm(x) = fm(y)$, de az $x$ csúcs két gyerekének különbözik a fekete magassága. Milyen színű az $y$ csúcs?

    *Megoldás:* Mivel a (fekete) magasságba a csúcs maga nem számít bele, ezért $x$ és $y$ színe azonos, de $x$ két gyerekének színe különböző. Ez utóbbi viszont csak akkor lehet, ha $x$ fekete (piros csúcs gyerekei mindig feketék), tehát $y$ is fekete.