Algoritmuselmélet

Mélységi keresés

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Mélységi bejárás

Gráf bejárás $\Longrightarrow$ minden pontot felsorolunk, bejárunk.
Szélességi bejárás (breadth-first-search, BFS) majd lesz BSZ2-ből, ott „széltében” fogunk haladni.
Most mélységben haladunk:
Mélységi bejárás (depth-first-search, DFS, backtrack)

Mélységi bejárás

Mohó menetelés, addig megyünk előre, amíg tudunk, csak aztán fordulunk vissza.
DFS animáció

Mélységi keresés algoritmusa

$G = (V, E)$ egy irányított gráf, ahol $V = \{1, \ldots, n\}$.
$L[v]$ a v csúcs éllistája ($1 \le v \le n$), azaz v szomszédainak listája.
bejárva$[1 : n]$ logikai vektor $\Longrightarrow$ jártunk-e már ott.

procedure DFS(G, v) ▷ *G bejárása v-ből indítva*
    bejárva[v] :=igaz;
    for all $L[v]$-beli w csúcsra **do**
        if bejárva[w] ==hamis **then**
            DFS(G,w);
            ▷ *indítunk egy bejárást a következő nem bejárt csúcsból*
        end if
    end for
end procedure

Mélységi keresés algoritmusa

procedure DFS-MAIN(G) ▷ *G minden csúcsának bejárása*
  for all $v \in V$ **do**
    bejárva[v] :=hamis;
  end for
  for all $v \in V$ **do**
    if bejárva[v] ==hamis **then**
      DFS(G,v);
      ▷ *indítunk egy bejárást a még nem bejárt csúcsok részgráfjában*
    end if
  end for
end procedure

Mélységi keresés lépésszáma

Legyen a G gráf pontszáma n, az élszáma pedig m.

- Minden csúcsra pontosan egyszer hívjuk meg a DFS(G, v) eljárást.
- Ekkor megvizsgáljuk a belőle kimenő összes élet, hogy lehet-e vele új csúcsot felfedezni. Azokat is amelyekkel lehet, és azokat is amelyekkel nem.
  - Éllistával: A szomszédok felsorolása $d_{ki}(v)$ lépés.
  - Szomsz. mátrixszal: A szomszédok felsorolása n lépés.
- Ha a DFS(G, v) véget ér, akkor DFS-MAIN(G) keres új kezdőpontot, ez többször is megtörténhet, de összegezve is $O(n)$ lépés.
- Az összes lépésszám:
  - Éllistával: $\sum_{v \in V} d_{ki}(v) + O(n) = O(n + m)$
  - Szomsz. mátrixszal: $\sum_{v \in V} n + O(n) = O(n^2)$

Mélységi számok és befejezési számok

Definíció (felfedező élek (faélek))

Olyan élek, amiken még nem bejárt, új csúcsokba jutunk.

Definíció (mélységi számozás)

A G irányított gráf csúcsainak egy mélységi számozása *a gráf v csúcsához azt a sorszámot rendeli, mely megadja, hogy az DFS-MAIN(G) eljárás során a csúcsok közül hányadikként állítottuk* bejárva[v] *értékét igaz-ra. A v csúcs mélységi számát* mszám[v] *jelöli.*

Definíció (befejezési számozás)

A G irányított gráf csúcsainak egy befejezési számozása *a gráf v csúcsához azt a sorszámot rendeli, mely megadja, hogy a csúcsok közül hányadikként ért véget az* DFS(G, v) *hívás. A v csúcs befejezési számát* bszám[v] *jelöli.*

Mélységi keresés algoritmusa

```
procedure DFS-MAIN(G)                         ▷ G minden csúcsának bejárása
    mszámláló := 0;   bszámláló := 0;
    for all v ∈ V do
        bejárva[v] :=hamis;
        mszám[v] := 0;   bszám[v] := 0;
        F := ∅                                ▷ felfedező élek halmaza
    end for
    for all v ∈ V do
        if bejárva[v] ==hamis then
            DFS(G,v);
        end if
    end for
end procedure
```

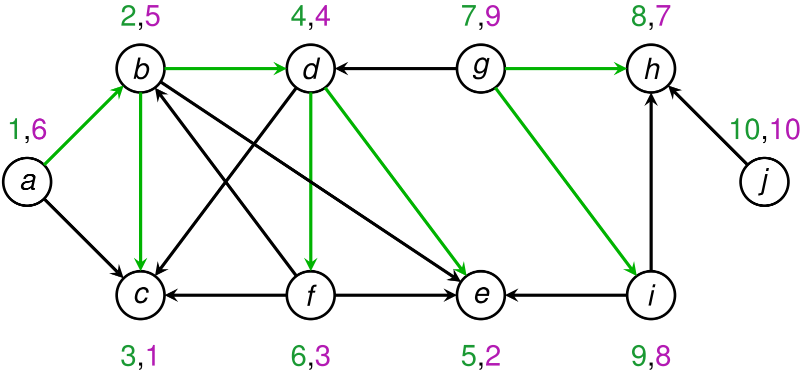
Mélységi keresés algoritmusa

```
procedure DFS(G, v)                          ▷ G bejárása v-ből indítva
    bejárva[v] :=igaz;
    mszámláló := mszámláló + 1;   mszám[v] := mszámláló;
    for all L[v]-beli w csúcsra do
        if bejárva[w] ==hamis then
            F := F ∪ (v, w);                 ▷ új felfedező él
            DFS(G,w);
        end if
    end for
    bszámláló := bszámláló + 1;   bszám[v] := bszámláló;
                                             ▷ Befejeztük a felderítést v-ből.
end procedure
```

Példa

Feltesszük, hogy a szomszédossági mátrixban illetve az éllistában a pontok sorrendje az ábécé szerint van.

mszám[v], bszám[v]



DFS erdő

Definíció (felfedező élek (faélek))

Olyan élek, amiken még nem bejárt, új csúcsokba jutunk.

Jelölje F azt a gráfot, amelynek csúcshalmaza V, élei pedig a faélek.

Lemma

Ha az élek irányításától eltekintünk, akkor ez egy körmentes részgráf.

Bizonyítás.

Akkor veszünk be egy élet F-be, ha az egyik végpontját már bejártuk, a másikat viszont eddig még nem $\Longrightarrow$ így soha nem alakulhat ki kör $\Longrightarrow$ körmentes részgráf $\square$

Egy irányítatlan gráfban egy körmentes gráf minden összefüggő komponense egy fa, ezért a körmentes irányítatlan gráfok neve: erdő

DFS erdő

Definíció (DFS erdő, DFS fa)

Az előbb meghatározott F gráfot a G gráf egy DFS erdejének nevezzük. Ha F csak egy komponensből áll, akkor DFS fáról beszélünk.

Megjegyzés

Az F gráf élei irányítottak, de ha az irányítástól eltekintünk, akkor erdő illetve fa. Egy ilyen fában az élek irányítása egy gyökeres irányított fát ad. A gyökér a fa elsőnek bejárt csúcsa és minden él a korábban bejárt csúcsokból később bejárt csúcsba mutat.

DFS erdő

A DFS-MAIN(G) eljárás először az első pontra meghívja a DFS(G, v) eljárást. Ez bejárja a pontok egy részét (lehet, hogy az összeset). Ha még nem járt be minden pontot, akkor további pontokra is meghívja.
Mely pontokat járja be DFS(G, x)?

Legyen F a $G = (V, E)$ irányított gráf egy DFS erdeje. Jelölje F_x a DFS(G, x) bejárás során kapott fa csúcsainak halmazát, vagyis az x gyökerű részfájának a csúcshalmazát. Legyen

$$S_x = \left\{ y \in V \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{van olyan } G\text{-beli } x \rightsquigarrow y \text{ irányított út, amelyen} \\ \text{a csúcsok mélységi száma legalább mszám}[x] \end{array} \right\}.$$

Másképpen: S_x azokból a csúcsokból áll, amikbe van út x-ből, de még nem jártuk be őket eddig (a korábbi DFS(G, v) hívásokkal).

Lemma (részfa lemma)

Tetszőleges $x \in V$ csúcsra $F_x = S_x$.

DFS erdő

Lemma (részfa lemma)

Tetszőleges $x \in V$ csúcsra $F_x = S_x$.

Bizonyítás.

F_x éppen azokból a pontokból áll, amelyek x-ből faélek mentén elérhetők. Faélekre mindig nő a mélységi szám $\Longrightarrow F_x \subseteq S_x$.

Fordított irány indirekt: Tegyük fel, hogy létezik egy $y \in S_x$ ami nincs F_x-ben vagyis nem éri el a bejárás és korábban se jártuk be.
$\Longrightarrow$ Van $x \to x_1 \to \ldots \to x_i \to x_{i+1} \to \ldots \to y$ út. Feltehetjük, hogy x_{i+1} az első, ami nincs F_x-ben.
De a DFS(G, x_i) is sorra került, ami viszont elérte x_{i+1}-et is, tehát $x_{i+1} \in F_x$. $\lightning$
$\Longrightarrow$ Nem létezik ilyen y. $\surd$ $\square$

DFS erdő

Következmény

Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf x csúcsából minden pont elérhető irányított úton. Tegyük fel továbbá, hogy a G mélységi bejárását x-szel kezdjük. Ekkor a DFS erdő egyetlen fából áll.

Bizonyítás.

$\text{mszám}[x] = 1 \implies S_x = V \implies F_x = V$ $\square$

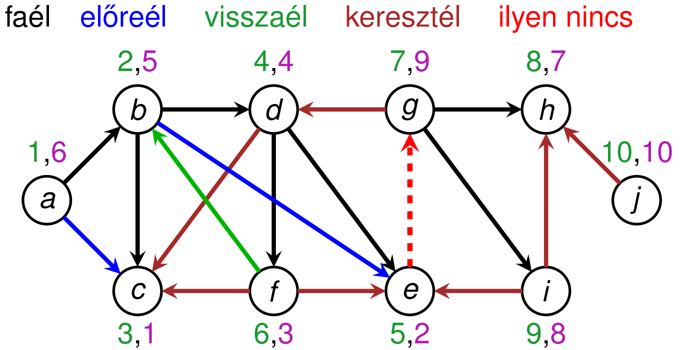
Élek osztályozása

Definíció (élek osztályozása)

Tekintsük a G irányított gráf egy mélységi bejárását és a kapott F DFS erdőt. y **leszármazottja** x*-nek, ha F-ben van irányított $x \rightsquigarrow y$ út. Ezen bejárás szerint G egy $x \to y$ éle*

faél,	*ha $x \to y$ éle F-nek;*
előreél,	*ha $x \to y$ nem faél, y leszármazottja x-nek F-ben és $x \neq y$;*
visszaél,	*ha x leszármazottja y-nak F-ben (a hurokél is ilyen);*
keresztél,	*ha x és y nem leszármazottai egymásnak.*

Élek osztályozása



$x \to y$	mszám	bszám
faél	mszám[x] $<$ mszám[y]	bszám[x] $>$ bszám[y]
előreél	mszám[x] $<$ mszám[y]	bszám[x] $>$ bszám[y]
visszaél	mszám[x] $>$ mszám[y]	bszám[x] $<$ bszám[y]
keresztél	mszám[x] $>$ mszám[y]	bszám[x] $>$ bszám[y]

Élek osztályozása

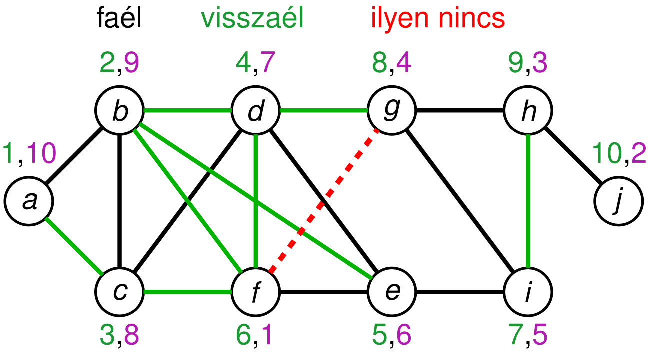
$x \to y$	ha az él vizsgálatakor
faél	mszám[y] $= 0$
előreél	mszám[x] $<$ mszám[y]
visszaél	mszám[x] $>$ mszám[y] és bszám[y] $= 0$
keresztél	mszám[x] $>$ mszám[y] és bszám[y] > 0.

Tétel

A DFS algoritmus kis módosításával az élek osztályozása is megkapható $O(n+m)$ illetve $O(n^2)$ lépésben.

Irányítatlan gráfok mélységi bejárása

Mélységi keresés ugyanígy.
DFS erdő komponensei: összefüggő komponensek.



faél $\Longleftrightarrow$ faél
előreél, visszaél $\Longleftrightarrow$ visszaél
keresztél: nem létezik

Mire jó mindez?

A DFS illetve kisebb-nagyobb módosításai/változatai számos feladatot megoldanak. Pl:

- Egy ismeretlen gráf minden csúcsának bejárása.
- Összefüggőség eldöntése.
- Feszítőfa/feszítőerdő előállítása.
- Elérhető-e x-ből y irányított/irányítatlan úton?
- ...