Algoritmuselmélet

Elágazás és korlátozás, dinamikus programozás

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Elágazás és korlátozás

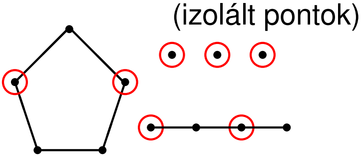
Legtöbbször van c^n-es algoritmus, de nem mindegy mekkora c.

Bontsunk esetekre, azokat alesetekre, ... $\Longrightarrow$ fa
Értékeljük az eseteket $\Longrightarrow$ bizonyos irányokba nem kell továbbmenni.
$\Longrightarrow$ (korlátozó heurisztika)
Pl. sakkállások

Feladat: Keressünk maximális méretű független ponthalmazt egy adott G gráfban.
Nyilvánvaló módszer:
Minden részhalmazt végignézünk $\Longrightarrow$ $O(2^n)$ lépés

Jobb algoritmus

Észrevétel: *Ha G-ben minden pont foka legfeljebb kettő, akkor a feladat lineáris időben megoldható: G izolált pontok, utak és körök diszjunkt uniója.* $\Longrightarrow$ *komponensenként minden „második" pontot bevesszük a halmazba.*



MF(G)

1. Ha G-ben minden pont foka ≤ 2, akkor MF(G) az előbbi eljárás által adott maximális független halmaz, és a munkát befejeztük.

2. Legyen $x \in G$, $fok(x) \geq 3$.

   $S_1 := \mathrm{MF}(G \setminus \{x\})$

   $S_2 := \{x\} \cup \mathrm{MF}(G \setminus \{x \text{ és szomszédai}\})$.

3. Legyen S az S_1 és S_2 közül a nagyobb méretű, illetve akármelyik, ha $|S_1| = |S_2|$.

4. MF(G) $:= S$.

Legyen $T(n)$ az MF(G)-n ($|V(G)| \leq n$) belüli MF hívások maximális száma, beleértve MF(G)-t magát is.

Tétel

Van olyan c állandó, hogy $T(n) \leq c\gamma^n$, tetszőleges n természetes számra, ahol γ a $\gamma^4 - \gamma^3 - 1 = 0$ egyenlet pozitív gyöke ($\gamma \approx 1,381$).

Bizonyítás.

Legyen $t(n) := T(n) + 1$.
$T(n) \leq T(n-1) + T(n-4) + 1$, ha $n > 4$. $\Longrightarrow$
$t(n) \leq t(n-1) + t(n-4)$, ha $n > 4$.
Indukcióval: $t(n) \leq c\gamma^n$ igaz $n < 5$-re elég nagy c-vel $\surd$
$\Longrightarrow$ Ezután, ha $n \geq 5$, indukciós feltevésből:

$$\begin{aligned} t(n) &\leq t(n-1) + t(n-4) \leq c\gamma^{n-1} + c\gamma^{n-4} = \\ &= c\gamma^{n-4}(\gamma^3 + 1) = c\gamma^{n-4}\gamma^4 = c\gamma^n. \end{aligned}$$

$\square$

Összköltség: $O(n^d T(n)) = O(n^d \gamma^n) = O(1,381^n)$.

3-színezés keresése

Feladat: Adott G, keressünk egy 3-színezést.

Minden lehetséges színezést végignézünk $\Longrightarrow$ $O(3^n)$ lépés

Ötlet: Bizonyos csúcsokat kiszínezünk pirosra, a többiről polinom időben el tudjuk dönteni, hogy kiszínezhetők-e kékkel és sárgával.

Összköltség: $O(2^n n^c)$.

Dinamikus programozás

Optimum meghatározása kisebb részfeladatok optimumainak felhasználásával.

Általában egy táblázat kitöltése, az új elemeket a korábban kitöltött elemekből számoljuk.

Binomiális együtthatók kiszámítása

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

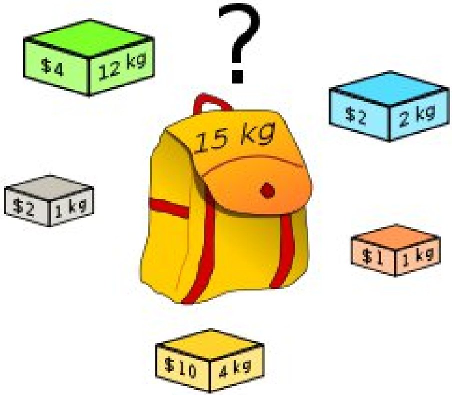
Tétel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Hátizsák probléma

Probléma

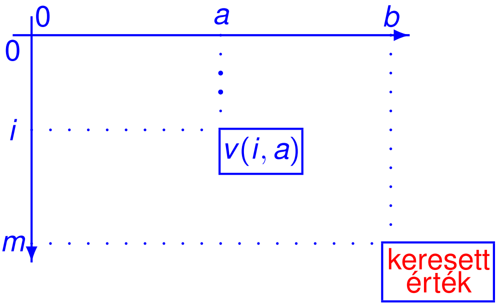
Adottak az $s_1, \dots, s_m$ súlyok, a b súlykorlát és a $v_1, \dots, v_m$ értékek. (Minden érték pozitív egész.) Melyik az az $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ részhalmaz, melyre teljesül, hogy $\sum_{i \in I} s_i \leq b$ és $\sum_{i \in I} v_i$ maximális?



Először kisebb problémára oldjuk meg: $v(i, a)$ a maximális elérhető érték az $s_1, \dots, s_i$ súlyokkal, $v_1, \dots, v_i$ értékekkel és a súlykorláttal megadott feladatra.

Ekkor $v(0, a) = v(i, 0) = 0$ $\forall a, i$-re

cél $\rightarrow$ $v(m, b)$



$$v(i, a) = \max\{v(i-1, a); v_i + v(i-1, a-s_i)\}$$

$\Longrightarrow$ Soronként kitölthető $\Longleftarrow$ minden érték két felette levőből számolható.

Összköltség: $O(bL)$

b-től függ (nem $\log b$-től!), ha b sokjegyű szám, ez sok idő