Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

2012. január 05.

A megoldásokat Búr Márton készítette.

1. Definiáld az $O(f)$ és $\Omega(f)$ jelölések jelentését!

Egy lehetséges megoldás:

$O(f)$ jelölés definíciója: Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $\mathbb{R}^+$ egy részhalmazán értelmezett, valós értéket felvevő függvények, akkor $g = O(f)$ jelöli azt a tényt, hogy $\exists\ c > 0$ és $x_0 > 0$ állandók, hogy $|g(x)| \leq c \cdot |f(x)|$, ha $x \geq x_0$.

$\Omega(f)$ jelölés definíciója: Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $\mathbb{R}^+$ egy részhalmazán értelmezett, valós értéket felvevő függvények, akkor $g = \Omega(f)$ jelöli azt a tényt, hogy $\exists\ c > 0$ és $x_0 > 0$ állandók, hogy $|g(x)| \geq c \cdot |f(x)|$, ha $x \geq x_0$.

---

2. Írd le a radix rendezés algoritmusát és bizonyítsd be, hogy az algoritmus mindig helyes eredményt ad! Mennyi az algoritmus lépésszáma? (A lépésszámot nem kell indokolni.)

Egy lehetséges megoldás:

A radix rendezés egy olyan lexikografikus rendezés, ami először k. koordináta szerint ládarendez, majd $(k-1).,(k-2).,\ldots,1.$ szerint, ebben a sorrendben. Mindig az egész listát rendezzük.

Ekkor azt állítjuk, hogy a lista rendezve van.

Az állítás bizonyítása:
Két tetszőleges elem legyen $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ és $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$, ahol $b < c$. Az állítás szerint a rendezés befejeztével b előrébb van, mint c.
$b_i = c_i\ \forall i$ esetén, amire $1 \leq i < j$, és legyen $b_j < c_j$, ahol $1 \leq j \leq k$.
A radix rendezés előbb a k., majd a $(k-1).,\ldots,(j+1)$. koordináta szerint ládarendez. A j. koordináta szerinti ládarendezés során a b a c elé kerül. A továbbiakban a $(j-1).,\ldots,1.$ koordináta szerinti rendezés nem változtat a kettőjük sorrendjén, tehát a rendezés befejeztével b a c előtt lesz, így az állítást igazoltuk. $\square$

Lépésszám: n elem rendezésének lépésszáma, melyek egyenként k darab koordinátával rendelkeznek $O(n + |A_1|) + O(n + |A_2|) + \cdots + O(n + |A_k|) = O(k \cdot n + \sum_{i=1}^{n} |A_i|)$, ahol az A_i véges, rendezett halmazból az i. koordináta került ki, így $|A_i|$ jelöli az i. koordináta szerinti rendezészhez szükséges ládák számát.

---

3. Ismertesd az irányított gráf erősen összefüggő komponenseinek meghatározására tanult algoritmust! (Az algoritmus helyességét nem kell bizonyítani.) Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indoklás ehhez sem kell.)

Egy lehetséges megoldás:

Az algoritmus lépései:

I. DFS futtatása egy választott x csúcsból.
II. A gráf éleinek irányításának megfordítása után DFS, csökkenő sorrendben indítva az előző befejezési számok szerint.
III. Ami mindkét irányban egy komponensben van, az egy erősen összefüggő komponensben van.

Lépésszám: $O(n+e)$, ahol n a csúcsok, e pedig az élek száma.

---

4. A Dinamikai Köztársaságban n-féle címletű pénzt használnak: $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ dinárosokat. Adj $O(nC)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy legkevesebb hány darab pénzzel lehet kifizetni C dinárt! (Feltesszük, hogy C dinárt valahogy ki lehet fizetni a fenti címletekkel.)

Egy lehetséges megoldás:

A feladatot dinamikus programozás segítségével oldhatjuk meg.

A megoldás elején egy kis egyszerűsítést tehetünk a dinárosokkal kapcsolatban: mivel a feladatban meg van engedve az egyenlőség az egyes dinárosok között, ezért az egyforma értéket képviselőket kezeljük azonosnak. Ezáltal $n' \leq n$ féle pénz áll rendelkezésünkre.

Kis C értékekre könnyen meghatározható, hogy legkevesebb hány pénzzel lehet az adott értéket kifizetni. (A feladat megadta, hogy a C értéket valahogy ki lehet rakni a dinárosokból.) Ez $C=0$ esetén 0 érmét jelent.

Ekkor jelölje $\mathcal{T}[i]$ az i összeg előállításához szükséges pénzek minimális számát. Ekkor legyen:

$$\mathcal{T}[i] = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0 \\ \min\limits_{\forall j}\{\mathcal{T}[i-d_j]\} + 1 & \text{ha } i > 0 \end{cases}$$

ahol a rekurziós képletben a '+1' jelöli az új összeg kirakásához szükséges felhasznált pénzt.

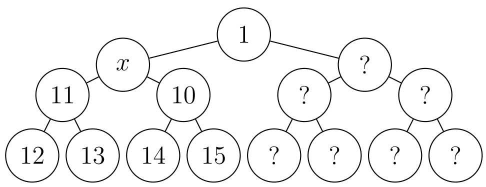
Az algoritmus végrehajtása során sorban elkezdjük kiszámolni $\mathcal{T}[1]$, $\mathcal{T}[2]$, ... értékeket
Leállási feltétel: ha $i = C$, akkor a megállunk.
Megoldás: $\mathcal{T}[C]$
Az eredmény helyes, mivel minden kiszámolt $\mathcal{T}[i]$ értékhez létezik egy érmekombináció, melyeket mind figyelembe vesszük, így mindenképp ezek minimuma kerül kiválasztásra.
Lépésszám: minden szóbajövő $0, \ldots, C$ összeg esetén n' elem minimumát vizsgáljuk, ahol $n' \leq n$, így a lépésszám $O(nC)$.

5. Egy 15 elemet tartlamazó kupacban az $1, 2, \ldots, 15$ számok vannak valamilyen elrendezésben. A kupac tömb reprezentációjának második eleme milyen számot tartalmazhat?

Egy lehetséges megoldás:

A kupac tömb reprezentációjáról tudjuk, hogy ha a kupacot reprezentáló teljes bináris fa csúcsait egy $A[1:n]$ tömbben tároljuk, akkor igaz, hogy balfiú$(A[i]) = A[2i]$ és jobbfiú$(A[i]) = A[2i+1]$. Ezek alapján tehát a feladat meghatározni, hogy mi lehet a balfiú(*gyökér*) eredménye?

Megállapíthatjuk, hogy a gyökérben az 1 fog szerepelni, hiszen ez az elem a legkisebb, és a kupac tulajdonságai miatt a legkisebb elem szerepel a gyökérben. A 15 elemet tartalmazó kupac egy 4 szintű, teljes bináris fával reprezentálható. Ebből következik, hogy a 6 legnagyobb elem $(10, 11, \ldots, 15)$ az alsó 2 szint valamelyikén helyezkedik el. Ha nem így lenne, akkor sérülne a kupac tulajdonság.
Vegyük az alábbi elrendezést:



Ebben az esetben x helyén állhat $2, 3, \ldots, 9$ attól függően, hogy mi volt a beszúrás sorrendje. A fennmaradó 7 számból pedig egy kupacot kell építeni a gyökér jobb részfájaként. Ezek az elemek az ábrán a ?-lel jelölt helyekre kerülnek. Mivel beláttuk, hogy a maradék számok közül egyik sem szerepelhet x helyén, így a megoldás az, hogy a $2, 3, \ldots, 9$ számok közül bármelyik állhat az $A[2]$-ben.

6. Egy kezdetben üres $3n$ méretű hashtáblába nyitott címzéssel beszúrunk n különböző egész számot a $h(x) = x \pmod{3n}$ hashfügvény alkalmazásával, kvadratikus próbával. Legfeljebb hány ütközés történhet?

Egy lehetséges megoldás:

Megjegyzés: Mivel a feladat hibásan lett kiírva, ezért lineáris próbálással oldjuk meg (kvadratikus esetben nem lehetne garantálni ezt a felső korlátot). A feladat ilyen megoldására 10 pont járt annak ellenére is, hogy hibás volt.

Mivel a tábla kezdetben üres, emiatt az ütközések elvi maximuma $\sum_{i=0}^{n-1} i = \dfrac{(n-1) \cdot n}{2}$, hiszen minden beszúrandó elem maximum annyi elemmel ütközhet, ahány elem van a táblában. Jó megoldás lehet ilyenkor a feladatra, ha mutatunk egy olyan esetet, ahol az ütközések száma pont a fent nevezett érték, hiszen ennél több ütközés semmiképp nem lehet.

Ha csak olyan különböző x_i elemeket szúrunk be, amire $\forall i$ esetén $x_i \equiv k \pmod{3n}$, ahol k állandó, akkor minden beszúrásnál az ütközések száma maximális lesz. Így beláttuk, hogy az ütközések száma maximum $\dfrac{(n-1) \cdot n}{2}$ lehet.

7. Éllistával adott egy G gráf, melynek élei súlyozottak (lehetnek negatív súlyok is). Szeretnénk a gráf pontjait két csoportra felosztani – egy X és egy Y ponthalmazra – úgy, hogy a legisebb súlyú olyan él, aminek egyik végpontja X-beli, másik pedig Y-beli, a lehető legnagyobb súlyú legyen. Adj $O(e \log e)$ lépésszámú algoritmust egy ilyen felosztás megtalálására!

Egy lehetséges megoldás:

Először nézzük azt az esetet, amikor a G gráf összefüggő. Ebben az esetben keressünk benne minimális súlyú feszítőfát, válasszuk ehhez a Prim algoritmus éllistás implementációját, ennek a lépésszáma $O(e \log e)$. A csúcsokat az F minimális feszítőfa egyik legnagyobb súlyú éle (melynek súlyát jelöljük s-el) bontsa két részre: az él egyik oldalán lévő pontok alkossák az X, a másik oldalon lévők az Y halmazt.

Megmutatjuk, hogy ez a felosztás megfelelő. Tegyük fel indirekt, hogy egy másik, X', Y' felosztás esetén minden X' és Y' között futó él nagyobb, mint s. Mivel F feszítőfa, biztosan lesz olyan éle, ami X' és Y' között fut. Viszont F minden élének súlya legfeljebb s, így ellentmondásra jutottunk.

Ha a G gráf nem összefüggő, akkor a fenti lépéseket komponensenként kell végrehajtani, majd a minimális feszítőfákból álló feszítőerdőből kell kiválasztani a legnagyobb súlyú élet.

8. Igazold, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:

Input: G gráf, k egész szám

Kérdés: Van-e G-ben olyan feszítőfa, melynek maximális fokszáma pontosan k?

Egy lehetséges megoldás:

A feladat megoldását kezdjük az NP-beliség belátásával. Jelen esetben egy jó tanú erre az n csúcsú gráfban egy olyan feszítőfa mutatása, aminek a maximális fokszáma k, hiszen ez polinom időben ellenőrizhető: az adott fára megnézzük, hogy minden csúcsát tartalmazza-e a gráfnak ($O(n)$ lépés), illetve a fa minden csúcsára $\deg(v) \leq k$, és van olyan csúcs amire $\deg(v) = k$ (szintén $O(n)$ lépés). Ezzel beláttuk, hogy az adott eldöntési probléma NP-beli.

Jelöljük a feladat eldöntési problémáját L-lel, és L'-vel azt a kicsivel egyszerűbb problémát, hogy ha a kérdést csak legalább 3 pontú gráfokra kell eldönteni. Elég belátni, hogy L' NP-nehéz, hiszen ebből nyilván következik, hogy az általánosabb L is az.

Belátjuk, hogy Hút $\prec L'$. A Karp-redukció a G gráfhoz rendelje a $(G, 2)$ párt, vagyis L' bemente legyen $G' = G$ és $k = 2$.

Az így megadott függvény polinom időben számolható. Továbbá pontosan akkor tartalmaz G Hamilton-utat, ha G'-ben található olyan feszítőfa, aminek a maximális fokszáma $k = 2$. Ez a kettő azért lesz minden esetben ekvivalens, mert az a feszítőfa, aminek a maximális fokszáma 2 az egy út, mely minden G-beli csúcsot tartalmaz.

Tehát L' és ezért L is egy NP-nehéz probléma. Mivel NP-beli is, ezért NP-teljes.