Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc. 2012. január 05.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár).
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a (legalább elégséges) zh pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.
Az eredményeket hétfő délig igyekszünk közzétenni a honlapon.
Megtekintés, szóbeli: 2012. január 9. hétfő, 14:00-15:00, valahol a tanszék környékén

1. Definiáld az $O(f)$ és $\Omega(f)$ jelölések jelentését!

2. Írd le a radix rendezés algoritmusát és bizonyítsd be, hogy az algoritmus mindig helyes eredményt ad! Mennyi az algoritmus lépésszáma? (A lépésszámot nem kell indokolni.)

3. Ismertesd az irányított gráf erősen összefüggő komponenseinek meghatározására tanult algoritmust! (Az algoritmus helyességén nem kell bizonyítani.) Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Indoklás ehhez sem kell.)

4. A Dinamikai Köztársaságban n-féle címletű pénzt használnak: $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$ dinárosokat. Adj $O(nC)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy legkevesebb hány darab pénzzel lehet kifizetni C dinárt! (Feltesszük, hogy C dinárt valahogy ki lehet fizetni a fenti címletekkel.)

5. Egy 15 elemet tartlamazó kupacban az $1, 2, \ldots, 15$ számok vannak valamilyen elrendezésben. A kupac tömb reprezentációjának második eleme milyen számot tartalmazhat?

6. Egy kezdetben üres $3n$ méretű hashtáblába nyitott címzéssel beszúrunk n különböző egész számot a $h(x) = x \pmod{3n}$ hashfügvény alkalmazásával, kvadratikus próbával. Legfeljebb hány ütközés történhet?

7. Éllistával adott egy G gráf, melynek élei súlyozottak (lehetnek negatív súlyok is). Szeretnénk a gráf pontjait két csoportra felosztani – egy X és egy Y ponthalmazra – úgy, hogy a legisebb súlyú olyan él, aminek egyik végpontja X-beli, másik pedig Y-beli, a lehető legnagyobb súlyú legyen. Adj $O(e \log e)$ lépésszámú algoritmust egy ilyen felosztás megtalálására!

8. Igazold, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:

   Input: G gráf, k egész szám

   Kérdés: Van-e G-ben olyan feszítőfa, melynek maximális fokszáma pontosan k?