

Algoritmuselmélet

2-3 fák

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

8. előadás

2-3-fák

Ez is fa, de a binárisnál bonyolultabb: **egy nem-levél csúcsnak 2 vagy 3 fia lehet.**

2-3-fák

Ez is fa, de a binárisnál bonyolultabb: **egy nem-levél csúcsnak 2 vagy 3 fia lehet.**

A **2-3-fa** egy (lefelé) irányított gyökeres fa, melyre:

- A rekordok a fa leveleiben helyezkednek el, a kulcs értéke szerint balról jobbra növekvő sorrendben. Egy levél egy rekordot tartalmaz.

2-3-fák

Ez is fa, de a binárisnál bonyolultabb: **egy nem-levél csúcsnak 2 vagy 3 fia lehet.**

A **2-3-fa** egy (lefelé) irányított gyökeres fa, melyre:

- A rekordok a fa leveleiben helyezkednek el, a kulcs értéke szerint balról jobbra növekvő sorrendben. Egy levél egy rekordot tartalmaz.
- Minden belső (azaz nem levél) csúcsból 2 vagy 3 él megy lefelé; ennek megfelelően a belső csúcsok egy, illetve két $s \in U$ kulcsot tartalmaznak. A belső csúcsok szerkezete tehát kétféle lehet. Az egyik típus így ábrázolható:

2-3-fák

Ez is fa, de a binárisnál bonyolultabb: **egy nem-levél csúcsnak 2 vagy 3 fia lehet.**

A **2-3-fa** egy (lefelé) irányított gyökeres fa, melyre:

- A rekordok a fa leveleiben helyezkednek el, a kulcs értéke szerint balról jobbra növekvő sorrendben. Egy levél egy rekordot tartalmaz.
- Minden belső (azaz nem levél) csúcsból 2 vagy 3 él megy lefelé; ennek megfelelően a belső csúcsok egy, illetve két $s \in U$ kulcsot tartalmaznak. A belső csúcsok szerkezete tehát kétféle lehet. Az egyik típus így ábrázolható:

m_1	s_1	m_2	s_2	m_3
-------	-------	-------	-------	-------

2-3-fák

Ez is fa, de a binárisnál bonyolultabb: **egy nem-levél csúcsnak 2 vagy 3 fia lehet.**

A **2-3-fa** egy (lefelé) irányított gyökeres fa, melyre:

- A rekordok a fa leveleiben helyezkednek el, a kulcs értéke szerint balról jobbra növekvő sorrendben. Egy levél egy rekordot tartalmaz.

- Minden belső (azaz nem levél) csúcsból 2 vagy 3 él megy lefelé; ennek megfelelően a belső csúcsok egy, illetve két $s \in U$ kulcsot tartalmaznak. A belső csúcsok szerkezete tehát kétféle lehet. Az egyik típus így ábrázolható:

m_1	s_1	m_2	s_2	m_3
-------	-------	-------	-------	-------

Itt m_1, m_2, m_3 mutatók a csúcs részfáira, s_1, s_2 pedig U -beli kulcsok, melyekre $s_1 < s_2$. Az m_1 által mutatott részfa **minden kulcsa kisebb**, mint s_1 , az m_2 részfájában s_1 a **legkisebb kulcs**, és minden kulcs kisebb, mint s_2 . Végül m_3 részfájában s_2 a **legkisebb kulcs**.

2-3-fák

Ez is fa, de a binárisnál bonyolultabb: **egy nem-levél csúcsnak 2 vagy 3 fia lehet.**

A **2-3-fa** egy (lefelé) irányított gyökeres fa, melyre:

- A rekordok a fa leveleiben helyezkednek el, a kulcs értéke szerint balról jobbra növekvő sorrendben. Egy levél egy rekordot tartalmaz.

- Minden belső (azaz nem levél) csúcsból 2 vagy 3 él megy lefelé; ennek megfelelően a belső csúcsok egy, illetve két $s \in U$ kulcsot tartalmaznak. A belső csúcsok szerkezete tehát kétféle lehet. Az egyik típus így ábrázolható:

m_1	s_1	m_2	s_2	m_3
-------	-------	-------	-------	-------

Itt m_1, m_2, m_3 mutatók a csúcs részfáira, s_1, s_2 pedig U -beli kulcsok, melyekre $s_1 < s_2$. Az m_1 által mutatott részfa **minden kulcsa kisebb**, mint s_1 , az m_2 részfájában s_1 a **legkisebb kulcs**, és minden kulcs kisebb, mint s_2 . Végül m_3 részfájában s_2 a **legkisebb kulcs**. A másik típusú csúcsoknál az az utolsó két mező hiányzik:

m_1	s_1	m_2
-------	-------	-------

2-3-fák

Ez is fa, de a binárisnál bonyolultabb: **egy nem-levél csúcsnak 2 vagy 3 fia lehet.**

A **2-3-fa** egy (lefelé) irányított gyökeres fa, melyre:

- A rekordok a fa leveleiben helyezkednek el, a kulcs értéke szerint balról jobbra növekvő sorrendben. Egy levél egy rekordot tartalmaz.
- Minden belső (azaz nem levél) csúcsból 2 vagy 3 él megy lefelé; ennek megfelelően a belső csúcsok egy, illetve két $s \in U$ kulcsot tartalmaznak. A belső csúcsok szerkezete tehát kétféle lehet. Az egyik típus így ábrázolható:

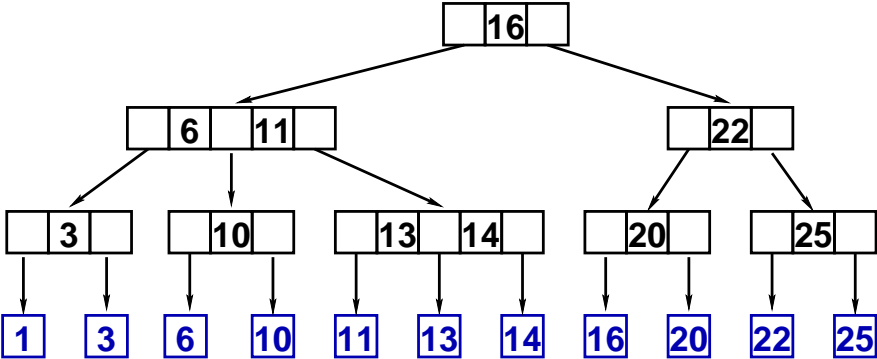
m_1	s_1	m_2	s_2	m_3
-------	-------	-------	-------	-------

 Itt m_1, m_2, m_3 mutatók a csúcs részfáira, s_1, s_2 pedig U -beli kulcsok, melyekre $s_1 < s_2$. Az m_1 által mutatott részfa **minden kulcsa kisebb**, mint s_1 , az m_2 részfájában s_1 a **legkisebb kulcs**, és minden kulcs kisebb, mint s_2 . Végül m_3 részfájában s_2 a **legkisebb kulcs**. A másik típusú csúcsoknál az az utolsó két mező hiányzik:

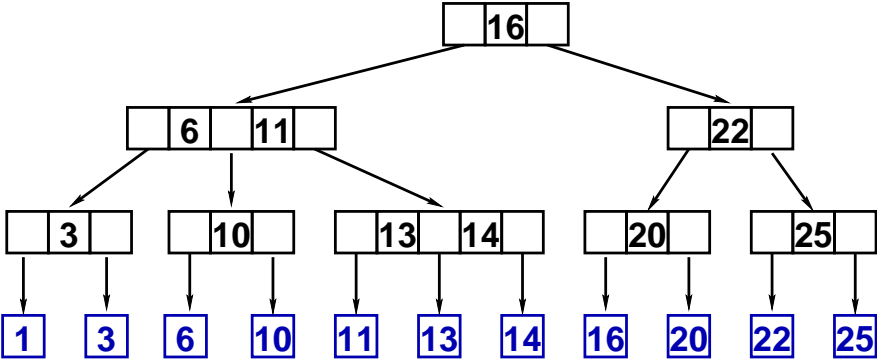
m_1	s_1	m_2
-------	-------	-------

- A fa levelei **a gyökértől egyforma távolságra** vannak.

Példa 2-3-fára



Példa 2-3-fára



2-3-fa tulajdonságai

Tétel

*Ha a fának m szintje van, akkor a levelek száma legalább 2^{m-1} .
Megfordítva, ha $|S| = n$ (itt $S \subseteq U$ a fában tárolt kulcsok halmaza; $|S|$ megegyezik a tárolt rekordok számával), akkor $m \leq \log_2 n + 1$.*

2-3-fa tulajdonságai

Tétel

*Ha a fának m szintje van, akkor a levelek száma legalább 2^{m-1} .
Megfordítva, ha $|S| = n$ (itt $S \subseteq U$ a fában tárolt kulcsok halmaza; $|S|$ megegyezik a tárolt rekordok számával), akkor $m \leq \log_2 n + 1$.*

Bizonyítás.

Minden belső csúcsnak legalább 2 fia van \implies

2-3-fa tulajdonságai

Tétel

*Ha a fának m szintje van, akkor a levelek száma legalább 2^{m-1} .
Megfordítva, ha $|S| = n$ (itt $S \subseteq U$ a fában tárolt kulcsok halmaza; $|S|$ megegyezik a tárolt rekordok számával), akkor $m \leq \log_2 n + 1$.*

Bizonyítás.

Minden belső csúcsnak legalább 2 fia van \implies
az i -edik szinten legalább 2^{i-1} csúcs van ($1 \leq i \leq m$).

2-3-fa tulajdonságai

Tétel

*Ha a fának m szintje van, akkor a levelek száma legalább 2^{m-1} .
Megfordítva, ha $|S| = n$ (itt $S \subseteq U$ a fában tárolt kulcsok halmaza; $|S|$ megegyezik a tárolt rekordok számával), akkor $m \leq \log_2 n + 1$.*

Bizonyítás.

Minden belső csúcsnak legalább 2 fia van \implies
az i -edik szinten legalább 2^{i-1} csúcs van ($1 \leq i \leq m$). \implies
 $2^{m-1} \leq n \implies m - 1 \leq \log_2 n$. \checkmark □

2-3-fa tulajdonságai

Tétel

*Ha a fának m szintje van, akkor a levelek száma legfeljebb 3^{m-1} .
Megfordítva, $m \geq \log_3 n + 1$.*

2-3-fa tulajdonságai

Tétel

*Ha a fának m szintje van, akkor a levelek száma legfeljebb 3^{m-1} .
Megfordítva, $m \geq \log_3 n + 1$.*

Bizonyítás.

Minden belső csúcsnak legfeljebb 3 fia van \implies

2-3-fa tulajdonságai

Tétel

*Ha a fának m szintje van, akkor a levelek száma legfeljebb 3^{m-1} .
Megfordítva, $m \geq \log_3 n + 1$.*

Bizonyítás.

Minden belső csúcsnak legfeljebb 3 fia van \implies
az i -edik szinten legfeljebb 3^{i-1} csúcs van ($1 \leq i \leq m$).

2-3-fa tulajdonságai

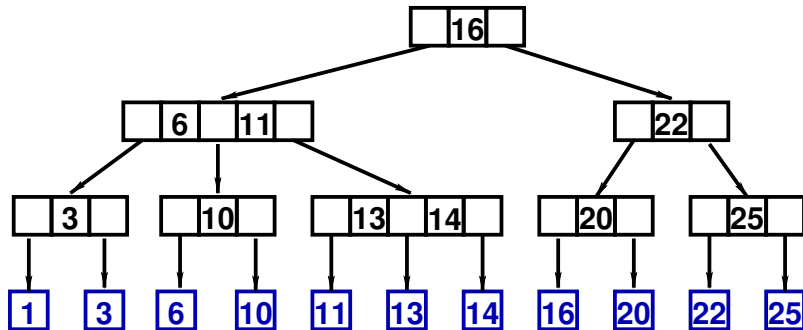
Tétel

*Ha a fának m szintje van, akkor a levelek száma legfeljebb 3^{m-1} .
Megfordítva, $m \geq \log_3 n + 1$.*

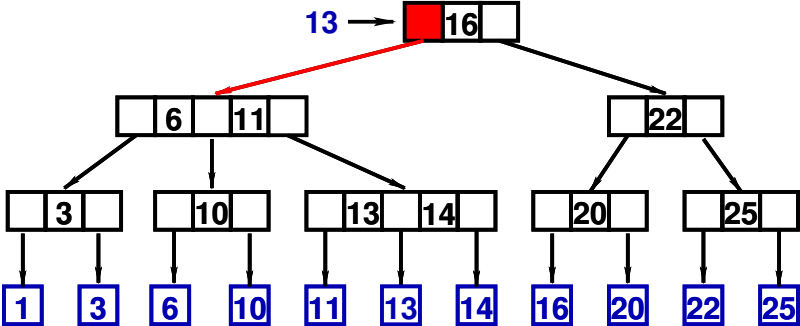
Bizonyítás.

Minden belső csúcsnak legfeljebb 3 fia van \implies
az i -edik szinten legfeljebb 3^{i-1} csúcs van ($1 \leq i \leq m$). \implies
 $n \leq 3^{m-1} \implies m - 1 \geq \log_3 n$. ✓ □

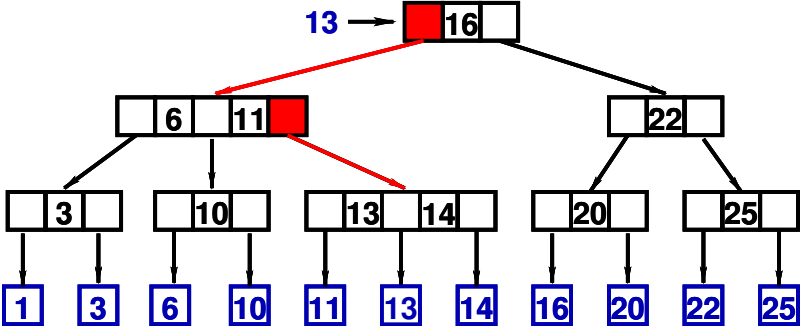
Keresés 2-3-fában



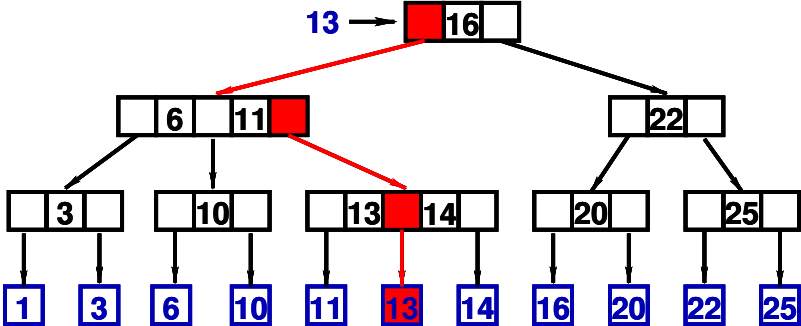
Keresés 2-3-fában



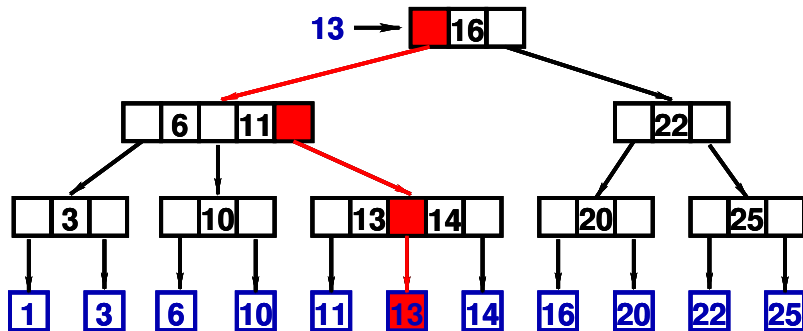
Keresés 2-3-fában



Keresés 2-3-fában

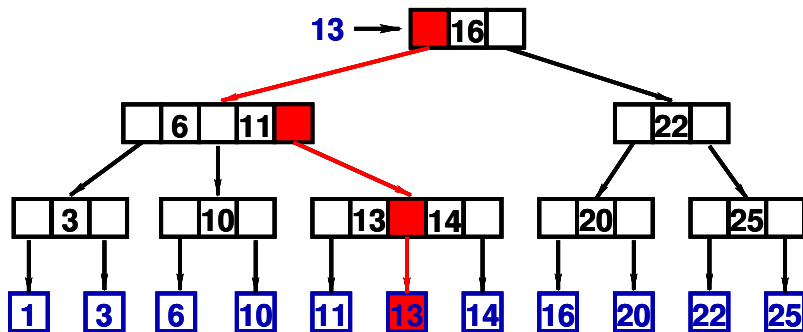


Keresés 2-3-fában



Hasonló, mint a bináris keresőfában.

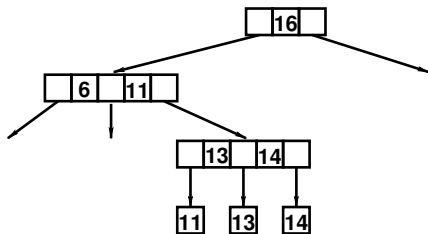
Keresés 2-3-fában



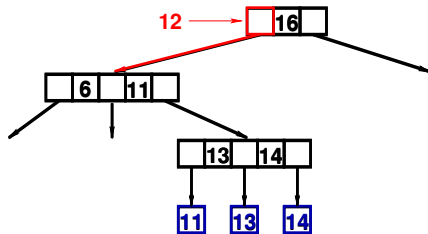
Hasonló, mint a bináris keresőfában.

Lépésszám: $O(m)$, ahol $\log_3(n) + 1 \leq m \leq \log_2(n) + 1$

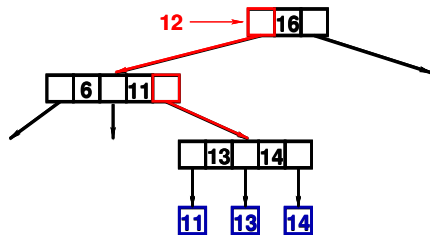
BESZÚR 2-3-fába



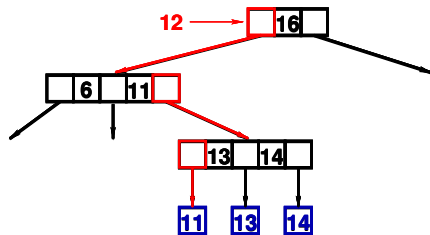
BESZÚR 2-3-fába



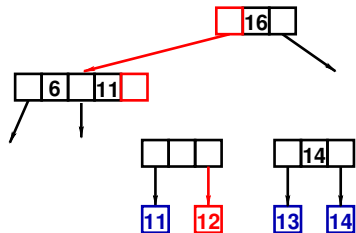
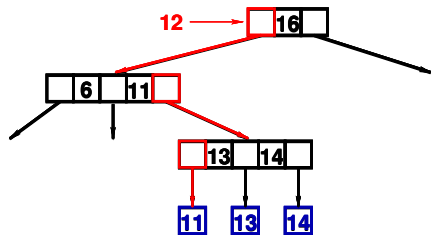
BESZÚR 2-3-fába



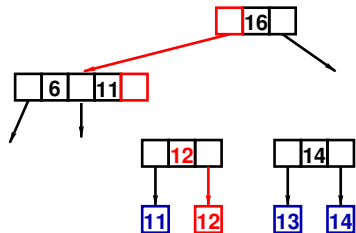
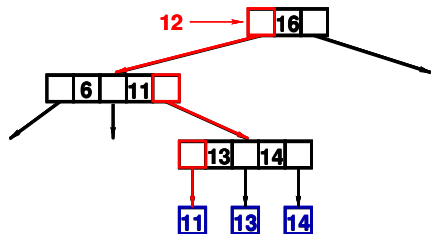
BESZÚR 2-3-fába



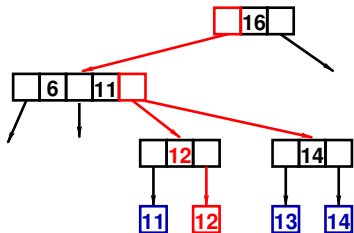
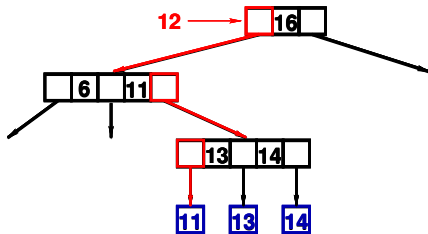
BESZÚR 2-3-fába



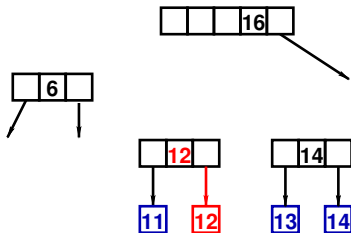
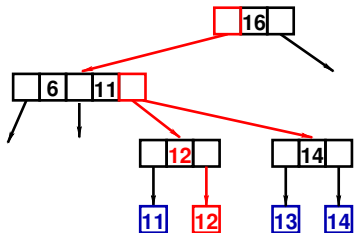
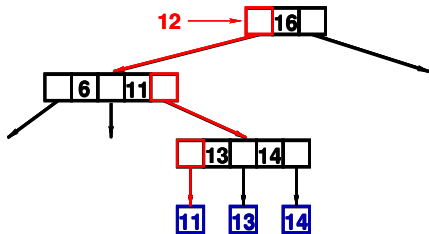
BESZÚR 2-3-fába



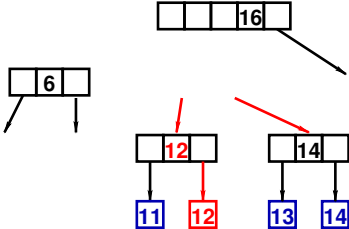
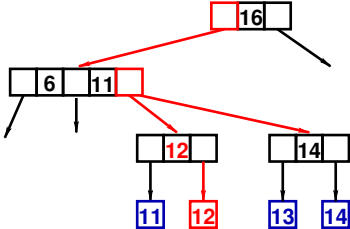
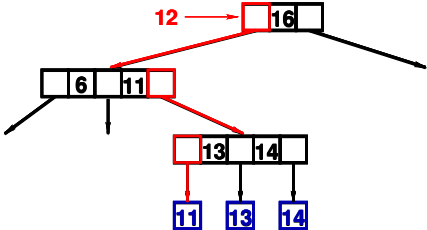
BESZÚR 2-3-fába



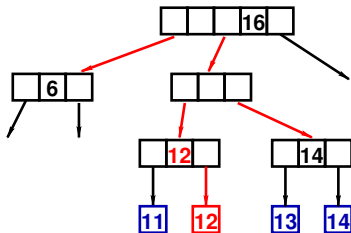
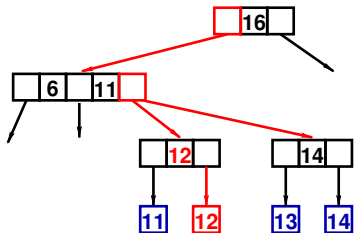
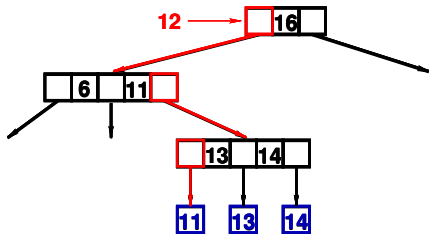
BESZÚR 2-3-fába



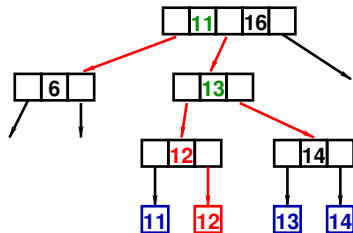
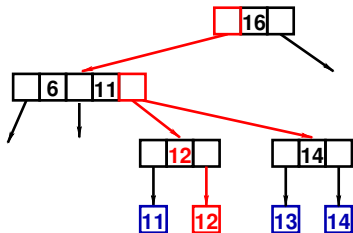
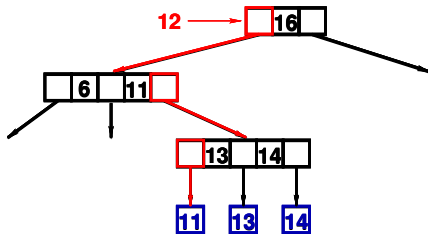
BESZÚR 2-3-fába



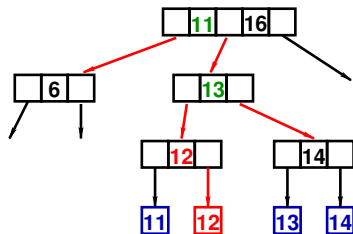
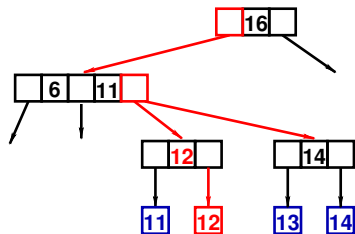
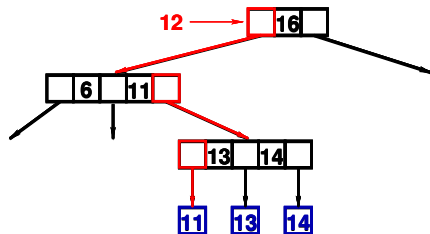
BESZÚR 2-3-fába



BESZÚR 2-3-fába

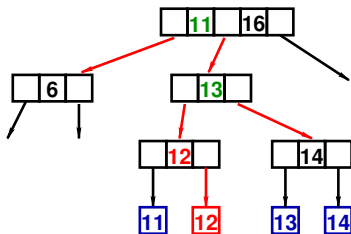
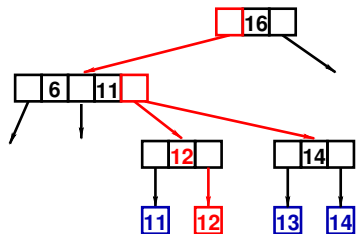
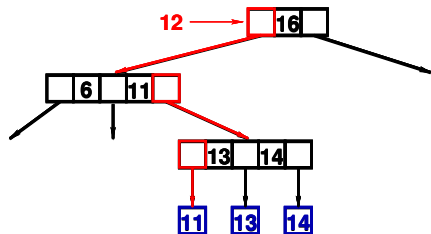


BESZÚR 2-3-fába



Ha a gyökeret is „vágni” kell \implies új gyökér, nő a fa magassága.

BESZÚR 2-3-fába



Ha a gyökeret is „vágni” kell \implies új gyökér, nő a fa magassága.

Lépésszám: $O(m)$, minden szinten legfeljebb 1 „vágás”.

TÖRÖL 2-3-fából

Legyen x a legalsó belső csúcs a kereső út mentén.

- Ha x -nek három fia van \implies ✓

TÖRÖL 2-3-fából

Legyen x a legalsó belső csúcs a kereső út mentén.

- Ha x -nek három fia van \implies ✓
- Ha x -nek csak két fia van:

TÖRÖL 2-3-fából

Legyen x a legalsó belső csúcs a kereső út mentén.

- Ha x -nek három fia van \implies ✓
- Ha x -nek csak két fia van:
 - ▶ ha x (valamelyik) szomszédos testvérének 3 fia van \implies egyet átteszünk x alá;

TÖRÖL 2-3-fából

Legyen x a legalsó belső csúcs a kereső út mentén.

- Ha x -nek három fia van \implies ✓
- Ha x -nek csak két fia van:
 - ▶ ha x (valamelyik) szomszédos testvérének 3 fia van \implies egyet áteszünk x alá;
 - ▶ ha x egyik szomszédos testvérének sincs három fia \implies „összevonunk” két kettős csúcsot.

TÖRÖL 2-3-fából

Legyen x a legalsó belső csúcs a kereső út mentén.

- Ha x -nek három fia van \implies ✓
- Ha x -nek csak két fia van:
 - ▶ ha x (valamelyik) szomszédos testvérének 3 fia van \implies egyet áteszünk x alá;
 - ▶ ha x egyik szomszédos testvérének sincs három fia \implies „összevonunk” két kettős csúcsot.

Ez is „felgyűrűzhet”. \implies

TÖRÖL 2-3-fából

Legyen x a legalsó belső csúcs a kereső út mentén.

- Ha x -nek három fia van \implies ✓
- Ha x -nek csak két fia van:
 - ▶ ha x (valamelyik) szomszédos testvérének 3 fia van \implies egyet áteszünk x alá;
 - ▶ ha x egyik szomszédos testvérének sincs három fia \implies „összevonunk” két kettős csúcsot.

Ez is „felgyűrűzhet”. \implies

Lépésszám: $O(m)$

B-fák

R. Bayer, E. McCreight, 1972

B-fák

R. Bayer, E. McCreight, 1972

A 2-3-fa általánosítása.

B-fák

R. Bayer, E. McCreight, 1972

A 2-3-fa általánosítása.

Nagy méretű adatbázisok, külső táron levő adatok feldolgozására használják. Több szabvány tartalmazza valamilyen változatát.

B-fák

R. Bayer, E. McCreight, 1972

A 2-3-fa általánosítása.

Nagy méretű adatbázisok, külső táron levő adatok feldolgozására használják. Több szabvány tartalmazza valamilyen változatát.

Probléma

Nem az összehasonlítás időigényes, hanem az adatok kiolvasása, de sokszor egy adat kiolvasásához amúgy is kiolvasunk több más adatot, egy lapot.

B-fák

R. Bayer, E. McCreight, 1972

A 2-3-fa általánosítása.

Nagy méretű adatbázisok, külső táron levő adatok feldolgozására használják. Több szabvány tartalmazza valamilyen változatát.

Probléma

Nem az összehasonlítás időigényes, hanem az adatok kiolvasása, de sokszor egy adat kiolvasásához amúgy is kiolvasunk több más adatot, egy lapot.

⇒ A fa csúcsai legyenek lapok, a költség a lapelérések száma.

B -fa definíciója

Egy m -edrendű B -fa, röviden B_m -fa egy gyökeres, (lefelé) irányított fa, melyre érvényesek az alábbiaknak:

B-fa definíciója

Egy *m-edrendű B-fa*, röviden *B_m-fa* egy gyökeres, (lefelé) irányított fa, melyre érvényesek az alábbiaknak:

- a) A gyökér foka legalább 2, kivéve esetleg, ha a fa legfeljebb kétszintes.

B-fa definíciója

Egy *m-edrendű B-fa*, röviden *B_m-fa* egy gyökeres, (lefelé) irányított fa, melyre érvényesek az alábbiaknak:

- a) A gyökér foka legalább 2, kivéve esetleg, ha a fa legfeljebb kétszintes.
- b) Minden más belső csúcsnak legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ fia van.

B-fa definíciója

Egy *m-edrendű B-fa*, röviden *B_m-fa* egy gyökeres, (lefelé) irányított fa, melyre érvényesek az alábbiaknak:

- a) A gyökér foka legalább 2, kivéve esetleg, ha a fa legfeljebb kétszintes.
- b) Minden más belső csúcsnak legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ fia van.
- c) A levelek a gyökértől egyforma messze vannak.

B-fa definíciója

Egy *m-edrendű B-fa*, röviden *B_m-fa* egy gyökeres, (lefelé) irányított fa, melyre érvényesek az alábbiaknak:

- A gyökér foka legalább 2, kivéve esetleg, ha a fa legfeljebb kétszintes.
- Minden más belső csúcsnak legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ fia van.
- A levelek a gyökértől egyforma messze vannak.
- Egy csúcsnak legfeljebb *m* fia lehet.

B-fa definíciója

Egy *m-edrendű B-fa*, röviden *B_m-fa* egy gyökeres, (lefelé) irányított fa, melyre érvényesek az alábbiaknak:

- a) A gyökér foka legalább 2, kivéve esetleg, ha a fa legfeljebb kétszintes.
- b) Minden más belső csúcsnak legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ fia van.
- c) A levelek a gyökértől egyforma messze vannak.
- d) Egy csúcsnak legfeljebb *m* fia lehet.
- d) A tárolni kívánt rekordok itt is a fa leveleiben vannak; egy levélben a lapmérettől és a rekordhossztól függően több rekord is lehet, növekvően rendezett láncolt listában.

B-fa definíciója

Egy *m-edrendű B-fa*, röviden *B_m-fa* egy gyökeres, (lefelé) irányított fa, melyre érvényesek az alábbiaknak:

- a) A gyökér foka legalább 2, kivéve esetleg, ha a fa legfeljebb kétszintes.
- b) Minden más belső csúcsnak legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ fia van.
- c) A levelek a gyökértől egyforma messze vannak.
- d) Egy csúcsnak legfeljebb *m* fia lehet.
- d) A tárolni kívánt rekordok itt is a fa leveleiben vannak; egy levélben a lapmérettől és a rekordhossztól függően több rekord is lehet, növekvően rendezett láncolt listában.

A belső csúcsok hasonlítanak a 2-3-fák belső csúcsaira. Egy belső csúcs így néz ki:

m_0	s_1	m_1	s_2	m_2	\dots	s_j	m_j
-------	-------	-------	-------	-------	---------	-------	-------

A B -fa szintszáma

Tegyük fel, hogy egy B -fának n levele és k szintje van, és keressünk összefüggést e két paraméter között.

A B -fa szintszáma

Tegyük fel, hogy egy B -fának n levele és k szintje van, és keressünk összefüggést e két paraméter között.

A kicsi fáktól eltekintve a gyökérnek legalább két fia van, a többi belső csúcsnak pedig legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.

A B -fa szintszáma

Tegyük fel, hogy egy B -fának n levele és k szintje van, és keressünk összefüggést e két paraméter között.

A kicsi fáktól eltekintve a gyökérnek legalább két fia van, a többi belső csúcsnak pedig legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.

$$\implies n \geq 2 \lceil \frac{m}{2} \rceil^{k-2},$$

A B -fa szintszáma

Tegyük fel, hogy egy B -fának n levele és k szintje van, és keressünk összefüggést e két paraméter között.

A kicsi fáktól eltekintve a gyökérnek legalább két fia van, a többi belső csúcsnak pedig legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.

$$\implies n \geq 2 \lceil \frac{m}{2} \rceil^{k-2}, \implies \log_{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \frac{n}{2} + 2 \geq k$$

A B -fa szintszáma

Tegyük fel, hogy egy B -fának n levele és k szintje van, és keressünk összefüggést e két paraméter között.

A kicsi fáktól eltekintve a gyökérnek legalább két fia van, a többi belső csúcsnak pedig legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.

$$\implies n \geq 2 \lceil \frac{m}{2} \rceil^{k-2}, \implies \log_{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \frac{n}{2} + 2 \geq k$$

$$k \leq \frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} + 2.$$

A B -fa szintszáma

Tegyük fel, hogy egy B -fának n levele és k szintje van, és keressünk összefüggést e két paraméter között.

A kicsi fáktól eltekintve a gyökérnek legalább két fia van, a többi belső csúcsnak pedig legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.

$$\implies n \geq 2 \lceil \frac{m}{2} \rceil^{k-2}, \implies \log_{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \frac{n}{2} + 2 \geq k$$

$$k \leq \frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} + 2.$$

Minden művelet lépésszáma: $\sim \frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} = \Theta\left(\frac{\log n}{\log m}\right)$, azaz a konstans szorzó kicsi, ha m nagy.

m viszont nem lehet túl nagy, hiszen a belső csúcsoknak egy lapon el kell férniük.

A B -fa szintszáma

Tegyük fel, hogy egy B -fának n levele és k szintje van, és keressünk összefüggést e két paraméter között.

A kicsi fáktól eltekintve a gyökérnek legalább két fia van, a többi belső csúcsnak pedig legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.

$$\implies n \geq 2 \lceil \frac{m}{2} \rceil^{k-2}, \implies \log_{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \frac{n}{2} + 2 \geq k$$

$$k \leq \frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} + 2.$$

Minden művelet lépésszáma: $\sim \frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} = \Theta\left(\frac{\log n}{\log m}\right)$, azaz a konstans szorzó kicsi, ha m nagy.

m viszont nem lehet túl nagy, hiszen a belső csúcsoknak egy lapon el kell férniük.

Például: Például, ha $m = 32$, $n = 2^{20}$ (itt n az alsó szint *lapjainak* száma), akkor $k \leq \frac{19}{4} + 2 < 7$. Egy rekord keresése tehát legfeljebb **6** lap elérését igényli.

A B -fa szintszáma

Tegyük fel, hogy egy B -fának n levele és k szintje van, és keressünk összefüggést e két paraméter között.

A kicsi fáktól eltekintve a gyökérnek legalább két fia van, a többi belső csúcsnak pedig legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.

$$\implies n \geq 2 \lceil \frac{m}{2} \rceil^{k-2}, \implies \log_{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \frac{n}{2} + 2 \geq k$$

$$k \leq \frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} + 2.$$

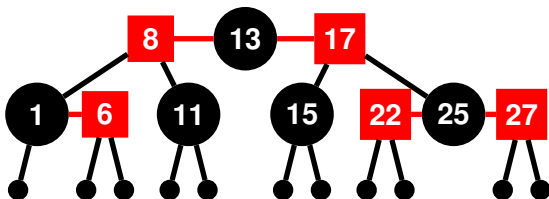
Minden művelet lépésszáma: $\sim \frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} = \Theta\left(\frac{\log n}{\log m}\right)$, azaz a konstans szorzó kicsi, ha m nagy.

m viszont nem lehet túl nagy, hiszen a belső csúcsoknak egy lapon el kell férniük.

Például: Például, ha $m = 32$, $n = 2^{20}$ (itt n az alsó szint *lapjainak* száma), akkor $k \leq \frac{19}{4} + 2 < 7$. Egy rekord keresése tehát legfeljebb **6** lap elérését igényli.

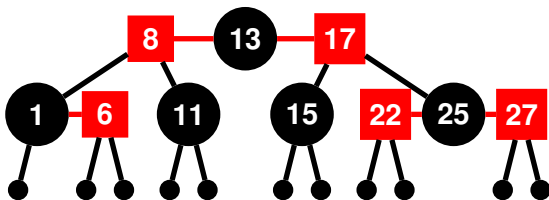
A piros-fekete fa és a B -fa kapcsolata

A piros-fekete fa olyan B_4 -fa, aminek a belső csúcsaiban tároljuk az elemeket.



A piros-fekete fa és a B -fa kapcsolata

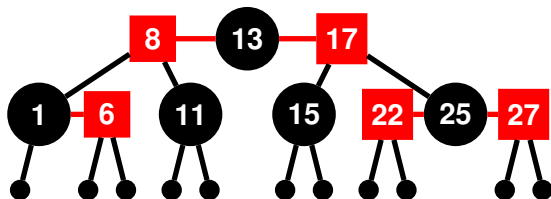
A piros-fekete fa olyan B_4 -fa, aminek a belső csúcsaiban tároljuk az elemeket.



A piros csúcsokat összevonjuk apjukkal, az így összevont csúcsoknak 2, 3 vagy 4 gyereke van.

A piros-fekete fa és a B -fa kapcsolata

A piros-fekete fa olyan B_4 -fa, aminek a belső csúcsaiban tároljuk az elemeket.

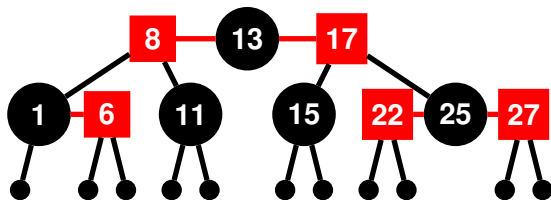


A piros csúcsokat összevonjuk apjukkal, az így összevont csúcsoknak 2, 3 vagy 4 gyereke van.

Ezért a mélység csak a fekete csúcsokkal nő.

A piros-fekete fa és a B -fa kapcsolata

A piros-fekete fa olyan B_4 -fa, aminek a belső csúcaiban tároljuk az elemeket.



A piros csúcsokat összevonjuk apjukkal, az így összevont csúcsoknak 2, 3 vagy 4 gyereke van.

Ezért a mélység csak a fekete csúcsokkal nő. \implies Mivel a fekete magasság állandó, minden levél azonos szinten lesz.