Algoritmuselmélet zárthelyi

A rendelkezésre álló munkaidõ 100 perc. 2014. március 31.
Kérjük, minden résztvevõ **nevét, NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felsõ sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelsõ lapra írja rá **gyakorlatvezetõje nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár).
Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a (legalább elégséges) zh pontszámát vesszük figyelembe.
Íróeszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttmûködés.

1. Legyen $f(x) = \max(x^3 - 10x^2 + 110x; x^2 + 100x)$ és $g(x) = 2^{3\log_2(x)} + x^2$.
   a) Igaz-e, hogy $f = O(g)$? b) Igaz-e, hogy $g = O(f)$?

2. Két teherautóval n darab ládát szerentének elszállítani. A ládák súlyai $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Adj olyan algoritmust, ami meghatározza, hogyan kell elhelyzeni a ládákat úgy, hogy a két teherautóra rakott összúly különbsége minimális legyen! Az algorotmus lépésszáma legyen $O(n \cdot w)$, ahol $w = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

3. Legyenek a G gráf pontjai a háromdimenziós tér azon rácspontjai, amelyeknek minden koordinátája 0 és m között van. Két pont pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik koordinátájuk pontosan 1-gyel tér el, a másik két koordinátájuk megegyezik. (Például $(2,3,4)$ és $(2,4,4)$ szomszédosak, de $(2,7,4)$-el nem szomszédos egyik sem.) Mekkora lesz a $(0,0,0)$ pontból indított szélességi keresőfa mélysége?

4. A Dijkstra és a Bellman-Ford algoritmus is úgy működik, hogy amikor meghatározza az adott pontba mutató legrövidebb út hosszát, akkor valójába felfedezett egy ekkora hosszúságú legrövidebb utat. Adj példát olyan irányított gráfra, melyben minden élen különböző, egész, pozitív súlyok vannak, és a Dijsktra illetve Bellman-Ford két különböző legrövidebb utat talál az x pontból az y pontba!

5. Az $A[1:2n]$ tömb egy kupacot reprezentál.
   a) Igaz-e, hogy az $A[1:n]$ tömb biztosan egy kupacot reprezentál?
   b) Igaz-e, hogy az $A[n+1:2n]$ tömb biztosan egy kupacot reprezentál?

6. A $B[1:n]$ tömb különböző egészeket tartalmaz. A $B[i]$ elem *lokális minimum*, ha $B[i-1] > B[i]$ és $B[i] < B[i+1]$ teljesül ($B[1]$ ill. $B[n]$ elég, ha az egy szomszédjánál kisebb). Adj algoritmust egy lokális minimum megkeresésére, mely legrosszabb esetben $O(\log n)$ összehasonlítást használ! (Ha több lokális minimum van, ezek közül mindegy melyiket találjuk meg.)

7. Az $1,2,3,4,5,8,10,9,7,6$ tömböt gyorsrendezéssel akarjuk rendezni, kétféleképp is végrehajtjuk. Az egyik futattatás során mindig az éppen rendezendő tömb első elemét választjuk véletlen elemnek a partíciós lépéshez, a másik futtatás során mindig a tömb utolsó elemét. Melyik esetben fogunk kevezebb összehasonlítást végezni?

8. Egy piros-fekete fában 13 elemet tárolunk. Minimálisan hány piros csúcs van a fában? (A teljes megoldáshoz be kell látni egy megfelelő k-ra, hogy lehet k piros, és azt is, hogy nem lehet $k-1$ piros.)