Algoritmuselmélet

NP-teljes problémák

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

13. előadás

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?

Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?

Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.

$\Longrightarrow$ X visszavezethető a Y problémára.

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?

Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.

$\Longrightarrow$ X visszavezethető a Y problémára.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) *az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy*

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?

Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.

$\Longrightarrow$ X visszavezethető a Y problémára.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) *az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy*

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Jelölés: $X \prec Y$, ha X-nek van Karp-redukciója Y-re.

Ha tehát van algoritmusunk Y eldöntésére $\Longrightarrow$

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?

Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.

$\Longrightarrow$ X visszavezethető a Y problémára.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) *az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy*

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Jelölés: $X \prec Y$, ha X-nek van Karp-redukciója Y-re.

Ha tehát van algoritmusunk Y eldöntésére $\Longrightarrow$ $x \in X$-re kiszámítjuk $f(x)$-et,

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?
Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.
$\Longrightarrow$ X visszavezethető a Y problémára.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) *az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy*

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Jelölés: $X \prec Y$, ha X-nek van Karp-redukciója Y-re.

Ha tehát van algoritmusunk Y eldöntésére $\Longrightarrow$ $x \in X$-re kiszámítjuk $f(x)$-et, eldöntjük $f(x) \in Y$?

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?

Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.

$\Longrightarrow$ X visszavezethető a Y problémára.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) *az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy*

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Jelölés: $X \prec Y$, ha X-nek van Karp-redukciója Y-re.

Ha tehát van algoritmusunk Y eldöntésére $\Longrightarrow$ $x \in X$-re kiszámítjuk $f(x)$-et, eldöntjük $f(x) \in Y$? $\Longrightarrow$ tudjuk, hogy $x \in X$ igaz-e. $\surd$

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?
Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.
$\Longrightarrow$ X visszavezethető a Y problémára.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) *az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy*

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Jelölés: $X \prec Y$, ha X-nek van Karp-redukciója Y-re.

Ha tehát van algoritmusunk Y eldöntésére $\Longrightarrow$ $x \in X$-re kiszámítjuk $f(x)$-et, eldöntjük $f(x) \in Y$? $\Longrightarrow$ tudjuk, hogy $x \in X$ igaz-e. $\surd$
Ha tudnánk, hogy X nehéz, és tudjuk, hogy $X \prec Y$

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?

Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.

$\Longrightarrow$ X visszavezethető a Y problémára.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) *az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy*

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Jelölés: $X \prec Y$, ha X-nek van Karp-redukciója Y-re.

Ha tehát van algoritmusunk Y eldöntésére $\Longrightarrow$ $x \in X$-re kiszámítjuk $f(x)$-et, eldöntjük $f(x) \in Y$? $\Longrightarrow$ tudjuk, hogy $x \in X$ igaz-e. $\surd$

Ha tudnánk, hogy X nehéz, és tudjuk, hogy $X \prec Y$

$\Longrightarrow$ Y is nehéz lenne.

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy X probléma egy Y problémánál?
Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X-et is.
$\Longrightarrow$ X visszavezethető a Y problémára.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X Karp-redukciója (polinomiális visszavezetése) *az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy*

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Jelölés: $X \prec Y$, ha X-nek van Karp-redukciója Y-re.

Ha tehát van algoritmusunk Y eldöntésére $\Longrightarrow$ $x \in X$-re kiszámítjuk $f(x)$-et, eldöntjük $f(x) \in Y$? $\Longrightarrow$ tudjuk, hogy $x \in X$ igaz-e. $\surd$
Ha tudnánk, hogy X nehéz, és tudjuk, hogy $X \prec Y$
$\Longrightarrow$ Y is nehéz lenne.
Ha Y könnyű, és X nem lényegesen nehezebb nála, akkor X is könnyű.

Irányított Hamilton-kör probléma (IH)

Tétel

$IH \prec H$.

Bizonyítás.

$G = (V, E)$ *egy irányított gráf* $\rightarrow G' = (V', E')$ *irányítatlan gráf*

Irányított Hamilton-kör probléma (IH)

Tétel

$IH \prec H$.

Bizonyítás.

$G = (V, E)$ *egy irányított gráf* $\rightarrow G' = (V', E')$ *irányítatlan gráf hogy* G' *gyorsan megépíthető és*

Irányított Hamilton-kör probléma (IH)

Tétel

IH $\prec$ *H.*

Bizonyítás.

$G = (V, E)$ *egy irányított gráf* $\rightarrow G' = (V', E')$ *irányítatlan gráf*
hogy G' *gyorsan megépíthető és*
G*-ben* $\exists$ *irányított Hamilton-kör* $\leftrightarrow G'$*-ben* $\exists$ *irányítatlan Hamilton-kör.*

Irányított Hamilton-kör probléma (IH)

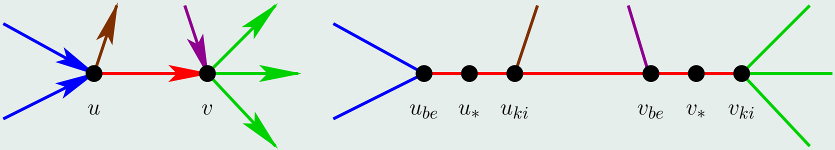
Tétel

$IH \prec H$.

Bizonyítás.

$G = (V, E)$ *egy irányított gráf* $\to G' = (V', E')$ *irányítatlan gráf*
hogy G' *gyorsan megépíthető és*
G*-ben* $\exists$ *irányított Hamilton-kör* $\leftrightarrow$ G'*-ben* $\exists$ *irányítatlan Hamilton-kör.*

$$\begin{aligned} V' &= \{v_{be}, v_*, v_{ki} \mid v \in V\}, \\ E' &= \{(v_{be}, v_*), (v_*, v_{ki}) \mid v \in V\} \cup \{(u_{ki}, v_{be}) \mid u \to v \in E\}. \end{aligned}$$



Irányított Hamilton-kör probléma (IH)

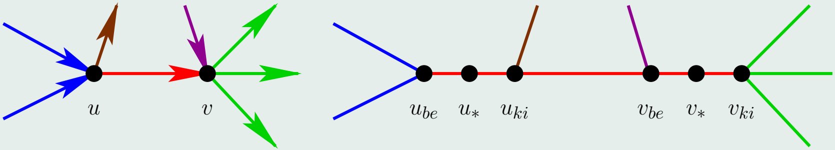
Tétel

$IH \prec H$.

Bizonyítás.

$G = (V, E)$ egy irányított gráf $\to$ $G' = (V', E')$ irányítatlan gráf hogy G' gyorsan megépíthető és G-ben $\exists$ irányított Hamilton-kör $\leftrightarrow$ G'-ben $\exists$ irányítatlan Hamilton-kör.

$$V' = \{v_{be}, v_*, v_{ki} \mid v \in V\},$$
$$E' = \{(v_{be}, v_*), (v_*, v_{ki}) \mid v \in V\} \cup \{(u_{ki}, v_{be}) \mid u \to v \in E\}.$$



$v(G) = n, e(G) = e \implies v(G') = 3n, e(G') = 2n + e \implies O(n + e)$ lépésben megkapható.

Irányított Hamilton-kör probléma (IH)

Tétel

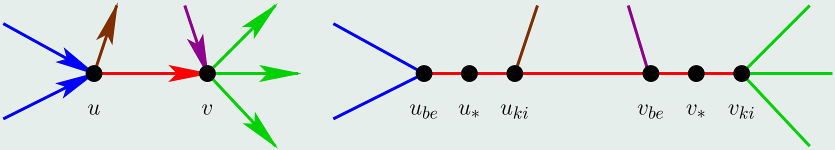
$IH \prec H$.

Bizonyítás.

$G = (V, E)$ *egy irányított gráf* $\to$ $G' = (V', E')$ *irányítatlan gráf hogy* G' *gyorsan megépíthető és* G*-ben* $\exists$ *irányított Hamilton-kör* $\leftrightarrow$ G'*-ben* $\exists$ *irányítatlan Hamilton-kör.*

$$V' = \{v_{be}, v_*, v_{ki} \mid v \in V\},$$

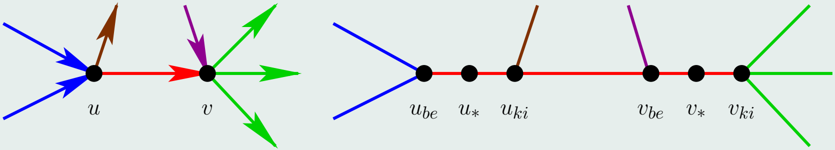
$$E' = \{(v_{be}, v_*), (v_*, v_{ki}) \mid v \in V\} \cup \{(u_{ki}, v_{be}) \mid u \to v \in E\}.$$



$v(G) = n, e(G) = e \implies v(G') = 3n, e(G') = 2n + e \implies O(n + e)$ *lépésben megkapható.*

Bizonyítás.

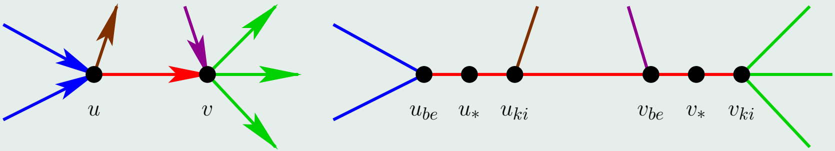
G-beli F irányított Hamilton-körének megfelel G' egy F' Hamilton-köre.



Az F egy $u \to v$ éle $\longrightarrow$ az F'-ben az $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ út.

Bizonyítás.

G-beli F irányított Hamilton-körének megfelel G' egy F' Hamilton-köre.

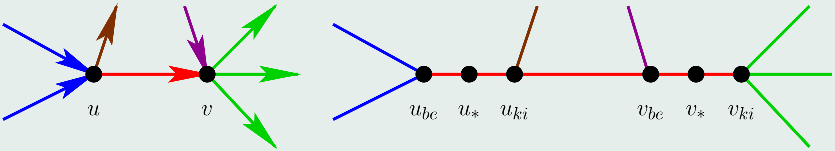


Az F egy $u \to v$ éle $\longrightarrow$ az F'-ben az $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ út.

Ezért $G \in IH \implies G' \in H$

Bizonyítás.

G-beli F irányított Hamilton-körének megfelel G' egy F' Hamilton-köre.



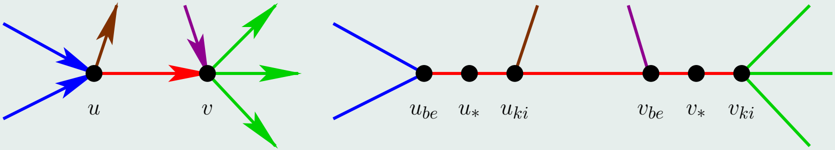
Az F egy $u \to v$ éle $\longrightarrow$ az F'-ben az $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ út.

Ezért $G \in IH \implies G' \in H$

Ha G'-ben van egy $F' \subseteq E'$ Hamilton-kör $\implies$ egy u_*-ból indulva egy u_{ki} felé lépjünk először

Bizonyítás.

G-beli F irányított Hamilton-körének megfelel G' egy F' Hamilton-köre.



Az F egy $u \to v$ éle $\longrightarrow$ az F'-ben az $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ út.

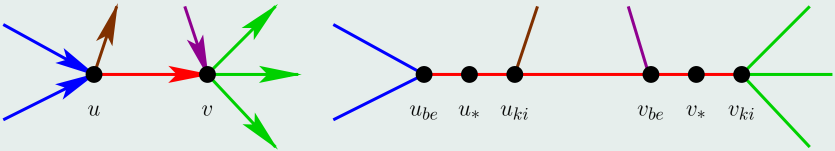
Ezért $G \in IH \implies G' \in H$

Ha G'-ben van egy $F' \subseteq E'$ Hamilton-kör $\implies$ egy u_*-ból indulva egy u_{ki} felé lépjünk először

$\implies$ csak $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ alakú lehet utána $\implies$ ez az út megfelel G-ben egy u -> v élnek.

Bizonyítás.

G-beli F irányított Hamilton-körének megfelel G' egy F' Hamilton-köre.



Az F egy $u \to v$ éle $\longrightarrow$ az F'-ben az $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ út.

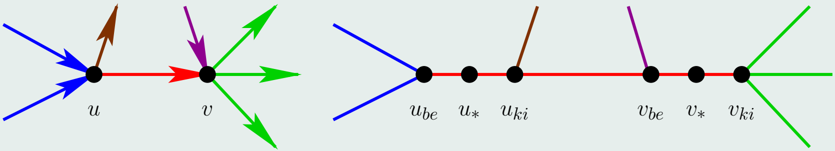
Ezért $G \in IH \implies G' \in H$

Ha G'-ben van egy $F' \subseteq E'$ Hamilton-kör $\implies$ egy u_*-ból indulva egy u_{ki} felé lépjünk először

$\implies$ csak $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ alakú lehet utána $\implies$ ez az út megfelel G-ben egy u -> v élnek. Ezt tovább folytatva Hamilton-kört kapunk G-ben.

Bizonyítás.

G-beli F irányított Hamilton-körének megfelel G' egy F' Hamilton-köre.



Az F egy $u \to v$ éle $\longrightarrow$ az F'-ben az $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ út.

Ezért $G \in IH \implies G' \in H$

Ha G'-ben van egy $F' \subseteq E'$ Hamilton-kör $\implies$ egy u_*-ból indulva egy u_{ki} felé lépjünk először

$\implies$ csak $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ alakú lehet utána $\implies$ ez az út megfelel G-ben egy u -> v élnek. Ezt tovább folytatva Hamilton-kört kapunk G-ben.

Ezért $G' \in H \implies G \in IH$. $\square$

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$*, akkor* $X \in \mathrm{P}$*.*

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$, *akkor* $X \in \mathrm{P}$.
2. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP}$ *akkor* $X \in \mathrm{NP}$.

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$, *akkor* $X \in \mathrm{P}$.
2. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP}$ *akkor* $X \in \mathrm{NP}$.
3. *Ha* $X \prec Y$, *akkor* $\overline{X} \prec \overline{Y}$

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$, *akkor* $X \in \mathrm{P}$.
2. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP}$ *akkor* $X \in \mathrm{NP}$.
3. *Ha* $X \prec Y$, *akkor* $\overline{X} \prec \overline{Y}$
4. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{coNP}$, *akkor* $X \in \mathrm{coNP}$.

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$*, akkor* $X \in \mathrm{P}$*.*
2. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP}$ *akkor* $X \in \mathrm{NP}$*.*
3. *Ha* $X \prec Y$*, akkor* $\overline{X} \prec \overline{Y}$
4. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{coNP}$*, akkor* $X \in \mathrm{coNP}$*.*
5. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$*, akkor* $X \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$*.*

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$, *akkor* $X \in \mathrm{P}$.
2. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP}$ *akkor* $X \in \mathrm{NP}$.
3. *Ha* $X \prec Y$, *akkor* $\overline{X} \prec \overline{Y}$
4. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{coNP}$, *akkor* $X \in \mathrm{coNP}$.
5. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$, *akkor* $X \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.
6. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \prec Z$, *akkor* $X \prec Z$.

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$, *akkor* $X \in \mathrm{P}$.
2. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP}$ *akkor* $X \in \mathrm{NP}$.
3. *Ha* $X \prec Y$, *akkor* $\overline{X} \prec \overline{Y}$
4. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{coNP}$, *akkor* $X \in \mathrm{coNP}$.
5. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$, *akkor* $X \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.
6. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \prec Z$, *akkor* $X \prec Z$.

Bizonyítás.

Legyen f *az* X *Karp-redukciója* Y*-re, ahol* f $c_1 n^k$ *időben számolható.*

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$, *akkor* $X \in \mathrm{P}$.
2. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP}$ *akkor* $X \in \mathrm{NP}$.
3. *Ha* $X \prec Y$, *akkor* $\overline{X} \prec \overline{Y}$
4. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{coNP}$, *akkor* $X \in \mathrm{coNP}$.
5. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$, *akkor* $X \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.
6. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \prec Z$, *akkor* $X \prec Z$.

Bizonyítás.

Legyen f *az* X *Karp-redukciója* Y*-re, ahol* f $c_1 n^k$ *időben számolható.* x *egy bemenet, melyről szeretnénk eldönteni, hogy* $x \in X$ *teljesül-e,* n *az* x *hossza.*

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{P}$*, akkor* $X \in \mathrm{P}$*.*
2. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP}$ *akkor* $X \in \mathrm{NP}$*.*
3. *Ha* $X \prec Y$*, akkor* $\overline{X} \prec \overline{Y}$
4. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{coNP}$*, akkor* $X \in \mathrm{coNP}$*.*
5. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$*, akkor* $X \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$*.*
6. *Ha* $X \prec Y$ *és* $Y \prec Z$*, akkor* $X \prec Z$*.*

Bizonyítás.

Legyen f *az* X *Karp-redukciója* Y*-re, ahol* f $c_1 n^k$ *időben számolható.* x *egy bemenet, melyről szeretnénk eldönteni, hogy* $x \in X$ *teljesül-e,* n *az* x *hossza.*

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$-et

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$*-et* $\rightarrow$ *időigénye* $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$.

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$-et $\rightarrow$ időigénye $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$.
Y felismerő algoritmusával $c_2|f(x)|^l$ időben eldöntjük, hogy $f(x) \in Y$ igaz-e.

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$*-et* $\rightarrow$ *időigénye* $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$.
Y felismerő algoritmusával $c_2 |f(x)|^l$ *időben eldöntjük, hogy* $f(x) \in Y$ *igaz-e.*
$\rightarrow$ *időigénye* $\leq c_2 (c_1 n^k)^l$

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$*-et* $\rightarrow$ *időigénye* $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$.
Y felismerő algoritmusával $c_2|f(x)|^l$ *időben eldöntjük, hogy* $f(x) \in Y$ *igaz-e.*
$\rightarrow$ *időigénye* $\leq c_2(c_1 n^k)^l$
$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y \implies$ *összidő* $O(n^{kl})$ $\surd$

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$-et $\rightarrow$ időigénye $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$.
Y felismerő algoritmusával $c_2|f(x)|^l$ időben eldöntjük, hogy $f(x) \in Y$ igaz-e.
$\rightarrow$ időigénye $\leq c_2(c_1 n^k)^l$
$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y \implies$ összidő $O(n^{kl})$ $\surd$

2.: Az $f(x) \in Y$ tény egy t tanúja jó $x \in X$ tanújának is, és az Y-hoz tartozó $\mathcal{T}$ tanúsító algoritmus egy kis módosítással jó lesz az X tanúsító algoritmusának is.

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$*-et* $\rightarrow$ *időigénye* $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$.
Y *felismerő algoritmusával* $c_2|f(x)|^l$ *időben eldöntjük, hogy* $f(x) \in Y$ *igaz-e.*
$\rightarrow$ *időigénye* $\leq c_2(c_1 n^k)^l$
$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y \implies$ *összidő* $O(n^{kl})$ $\surd$

2.: Az $f(x) \in Y$ *tény egy* t *tanúja jó* $x \in X$ *tanújának is, és az* Y*-hoz tartozó* $\mathcal{T}$ *tanúsító algoritmus egy kis módosítással jó lesz az* X *tanúsító algoritmusának is.*
$\mathcal{T}'$ *az* (x, t) *bemenetre először kiszámítja* $f(x)$*-et, majd az* $(f(x), t)$ *párra alkalmazza* $\mathcal{T}$*-t.*

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$-et $\to$ időigénye $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$.
Y felismerő algoritmusával $c_2|f(x)|^l$ időben eldöntjük, hogy $f(x) \in Y$ igaz-e.
$\to$ időigénye $\leq c_2(c_1 n^k)^l$
$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y \implies$ összidő $O(n^{kl})$ $\surd$

2.: Az $f(x) \in Y$ tény egy t tanúja jó $x \in X$ tanújának is, és az Y-hoz tartozó $\mathcal{T}$ tanúsító algoritmus egy kis módosítással jó lesz az X tanúsító algoritmusának is.
$\mathcal{T}'$ az (x, t) bemenetre először kiszámítja $f(x)$-et, majd az $(f(x), t)$ párra alkalmazza $\mathcal{T}$-t.
Ha az eredmény IGEN, *akkor legyen $\mathcal{T}'$ eredménye is* IGEN, *különben pedig* NEM.
$|t| = O(|f(x)|^c) \implies |t| = O(n^{kc})$

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$-et $\rightarrow$ időigénye $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$.
Y felismerő algoritmusával $c_2|f(x)|^l$ időben eldöntjük, hogy $f(x) \in Y$ igaz-e.
$\rightarrow$ időigénye $\leq c_2(c_1 n^k)^l$
$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y \implies$ összidő $O(n^{kl})$ $\surd$

2.: Az $f(x) \in Y$ tény egy t tanúja jó $x \in X$ tanújának is, és az Y-hoz tartozó $\mathcal{T}$ tanúsító algoritmus egy kis módosítással jó lesz az X tanúsító algoritmusának is.
$\mathcal{T}'$ az (x, t) bemenetre először kiszámítja $f(x)$-et, majd az $(f(x), t)$ párra alkalmazza $\mathcal{T}$-t.
Ha az eredmény IGEN*, akkor legyen $\mathcal{T}'$ eredménye is* IGEN*, különben pedig* NEM*.*
$|t| = O(|f(x)|^c) \implies |t| = O(n^{kc})$
$\mathcal{T}'$ lépésszáma, ha $\mathcal{T}$ lépésszáma $O((|y| + |t|)^l)$:
$O(n^k) + O((|f(x)| + |t|)^l) = O(n^k) + O(|f(x)|^{cl}) = O(n^{kcl})$.

Bizonyítás.

3.: X-nek egy Karp-redukciója Y-ra egyben egy Karp-redukció $\overline{X}$-ről $\overline{Y}$-re, hiszen $x \in X \iff f(x) \in Y$ ugyanaz, mint $x \notin X \iff f(x) \notin Y$

Bizonyítás.

3.: X-nek egy Karp-redukciója Y-ra egyben egy Karp-redukció $\overline{X}$-ről $\overline{Y}$-re, hiszen $x \in X \iff f(x) \in Y$ ugyanaz, mint $x \notin X \iff f(x) \notin Y$
4.: $\Longleftarrow$ 2.,3.

Bizonyítás.

3.: X-nek egy Karp-redukciója Y-ra egyben egy Karp-redukció $\overline{X}$-ről $\overline{Y}$-re, hiszen $x \in X \iff f(x) \in Y$ ugyanaz, mint $x \notin X \iff f(x) \notin Y$

4.: $\Longleftarrow$ 2.,3.

5.: $\Longleftarrow$ 2.,4.

Bizonyítás.

3.: X-nek egy Karp-redukciója Y-ra egyben egy Karp-redukció $\overline{X}$-ről $\overline{Y}$-re, hiszen $x \in X \iff f(x) \in Y$ ugyanaz, mint $x \notin X \iff f(x) \notin Y$

4.: $\Longleftarrow$ 2.,3.

5.: $\Longleftarrow$ 2.,4.

6.: Legyen f az $X \prec Y$ függvénye, ami $O(n^k)$ időben számolható és g az $Y \prec Z$ függvénye, ami $O(n^l)$ időben számolható.

Bizonyítás.

3.: X-nek egy Karp-redukciója Y-ra egyben egy Karp-redukció $\overline{X}$-ről $\overline{Y}$-re, hiszen $x \in X \iff f(x) \in Y$ ugyanaz, mint $x \notin X \iff f(x) \notin Y$

4.: $\Longleftarrow$ 2.,3.

5.: $\Longleftarrow$ 2.,4.

6.: Legyen f az $X \prec Y$ függvénye, ami $O(n^k)$ időben számolható és g az $Y \prec Z$ függvénye, ami $O(n^l)$ időben számolható.
Az $X \prec Z$ függvénye $g(f(x))$ lesz, ami $O((n^k)^l) = O(n^{kl})$ időben számolható. $\square$

NP-teljes problémák

Definíció

Az X eldöntési probléma NP*-nehéz, ha tetszőleges (azaz minden) $X' \in \mathrm{NP}$ probléma esetén létezik $X' \prec X$ Karp-redukció.*

NP-teljes problémák

Definíció

Az X eldöntési probléma NP*-nehéz, ha tetszőleges (azaz minden) $X' \in \mathrm{NP}$ probléma esetén létezik $X' \prec X$ Karp-redukció.*
Az X eldöntési probléma NP*-teljes, ha $X \in \mathrm{NP}$ és X* NP*-nehéz.*

Egy NP-teljes probléma tehát legalább olyan nehéz, mint bármely más NP-beli probléma.

NP-teljes problémák

Definíció

Az X eldöntési probléma NP-nehéz, ha tetszőleges (azaz minden) $X' \in \mathrm{NP}$ probléma esetén létezik $X' \prec X$ Karp-redukció.
Az X eldöntési probléma NP-teljes, ha $X \in \mathrm{NP}$ és X NP-nehéz.

Egy NP-teljes probléma tehát legalább olyan nehéz, mint bármely más NP-beli probléma.
Ha egy ilyen problémáról kiderülne, hogy P-beli (coNP-beli), akkor ugyanez igaz lenne minden NP-beli problémára.

Van-e NP-teljes probléma?

Boole-formulák

Definíció

Az $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *függvényeket* n*-változós* Boole-függvényeknek *vagy* Boole-formuláknak *hívjuk.*

Boole-formulák

Definíció

Az $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *függvényeket n-változós* Boole-függvényeknek *vagy* Boole-formuláknak *hívjuk.*

Tétel

Minden Boole-függvény felírható az $x_1, \ldots, x_n$ *Boole-változók, az* $\wedge, \vee, \neg$ *logikai műveletek és zárójelek segítségével.*

Boole-formulák

Definíció

Az $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *függvényeket* n*-változós* Boole-függvényeknek *vagy* Boole-formuláknak *hívjuk.*

Tétel

Minden Boole-függvény felírható az $x_1, \ldots, x_n$ *Boole-változók, az* $\wedge, \vee, \neg$ *logikai műveletek és zárójelek segítségével.*

Pl. Boole-formula:

$$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge ((\neg x_3 \vee x_2 \vee (x_6 \wedge x_1)) \wedge \neg(x_5 \vee x_6))$$

Boole-formulák

Definíció

Az $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *függvényeket* n*-változós* Boole-függvényeknek *vagy* Boole-formuláknak *hívjuk.*

Tétel

Minden Boole-függvény felírható az $x_1, \ldots, x_n$ *Boole-változók, az* $\wedge, \vee, \neg$ *logikai műveletek és zárójelek segítségével.*

Pl. Boole-formula:

$$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge ((\neg x_3 \vee x_2 \vee (x_6 \wedge x_1)) \wedge \neg(x_5 \vee x_6))$$

Boole-formulák

Definíció

Egy Boole-formula kielégíthető, ha lehet úgy értékeket adni a változóinak, hogy a függvény értéke 1 legyen.

Boole-formulák

Definíció

Egy Boole-formula kielégíthető, ha lehet úgy értékeket adni a változóinak, hogy a függvény értéke 1 legyen.

Pl. $\Phi(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ kielégíthető, mert ha $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$, akkor $\Phi(x_1, x_2) = 1$

Boole-formulák

Definíció

Egy Boole-formula kielégíthető, ha lehet úgy értékeket adni a változóinak, hogy a függvény értéke 1 legyen.

Pl. $\Phi(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ kielégíthető, mert ha $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$, akkor $\Phi(x_1, x_2) = 1$

De pl. $(x_1 \wedge \neg x_1)$ nyilván nem kielégíthető.

Cook–Levin-tétel

Van-e NP-teljes probléma?

Cook–Levin-tétel

Van-e NP-teljes probléma?

Definíció

SAT *probléma:*

Bemenet: Φ *Boole-fomula*

Kérdés: *Kielégíthető-e* Φ*?*

Cook–Levin-tétel

Van-e NP-teljes probléma?

Definíció

SAT *probléma:*

Bemenet: Φ *Boole-fomula*

Kérdés: Kielégíthető-e Φ*?*

Tétel (S. A. Cook, L. Levin, 1971)

A SAT *probléma* NP*-teljes.*

Cook–Levin-tétel

Van-e NP-teljes probléma?

Definíció

SAT *probléma:*

Bemenet: Φ *Boole-fomula*

Kérdés: Kielégíthető-e Φ*?*

Tétel (S. A. Cook, L. Levin, 1971)

A SAT *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás elég bonyolult.

További NP-teljes feladatok

Tétel

Ha az X probléma NP*-teljes,* $Y \in \mathrm{NP}$ *és* $X \prec Y$*, akkor* Y *is* NP*-teljes.*

További NP-teljes feladatok

Tétel

Ha az X probléma NP-teljes, $Y \in \mathrm{NP}$ és $X \prec Y$, akkor Y is NP-teljes.

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a Karp-redukció tranzitív.

További NP-teljes feladatok

Tétel

Ha az X probléma NP-teljes, $Y \in \mathrm{NP}$ és $X \prec Y$, akkor Y is NP-teljes.

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a Karp-redukció tranzitív.
$\Longrightarrow$ Ha $X \prec Y$ és $Z \prec X$ teljesül $\forall Z \in \mathrm{NP}$ problémára.

További NP-teljes feladatok

Tétel

Ha az X probléma NP-teljes, $Y \in \mathrm{NP}$ és $X \prec Y$, akkor Y is NP-teljes.

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a Karp-redukció tranzitív.

$\Longrightarrow$ Ha $X \prec Y$ és $Z \prec X$ teljesül $\forall Z \in \mathrm{NP}$ problémára.

$\Longrightarrow$ $Z \prec Y$ teljesül $\forall Z \in \mathrm{NP}$ problémára.

További NP-teljes feladatok

Tétel

Ha az X probléma NP-teljes, $Y \in \mathrm{NP}$ és $X \prec Y$, akkor Y is NP-teljes.

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a Karp-redukció tranzitív.
$\Longrightarrow$ Ha $X \prec Y$ és $Z \prec X$ teljesül $\forall Z \in \mathrm{NP}$ problémára.
$\Longrightarrow$ $Z \prec Y$ teljesül $\forall Z \in \mathrm{NP}$ problémára.
$\Longrightarrow$ $Y \in \mathrm{NP}$-nehéz.

További NP-teljes feladatok

Tétel

Ha az X probléma NP-teljes, $Y \in \mathrm{NP}$ és $X \prec Y$, akkor Y is NP-teljes.

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a Karp-redukció tranzitív.

$\Longrightarrow$ Ha $X \prec Y$ és $Z \prec X$ teljesül $\forall Z \in \mathrm{NP}$ problémára.

$\Longrightarrow$ $Z \prec Y$ teljesül $\forall Z \in \mathrm{NP}$ problémára.

$\Longrightarrow$ $Y \in \mathrm{NP}$-nehéz.

Mivel $Y \in \mathrm{NP}$ is $\Longrightarrow$ $Y \in \mathrm{NP}$-teljes. $\square$

Nem kell már minden NP-beli problémát az Y-ra redukálni; elég ezt megtenni egyetlen NP-teljes X problémával.

További NP-teljes feladatok

Tétel

Ha az X probléma NP*-teljes, $Y \in \mathrm{NP}$ és $X \prec Y$, akkor Y is* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a Karp-redukció tranzitív.
$\Longrightarrow$ Ha $X \prec Y$ és $Z \prec X$ teljesül $\forall Z \in \mathrm{NP}$ problémára.
$\Longrightarrow$ $Z \prec Y$ teljesül $\forall Z \in \mathrm{NP}$ problémára.
$\Longrightarrow$ $Y \in \mathrm{NP}$-nehéz.
Mivel $Y \in \mathrm{NP}$ is $\Longrightarrow$ $Y \in \mathrm{NP}$-teljes. $\square$

Nem kell már minden NP-beli problémát az Y-ra redukálni; elég ezt megtenni egyetlen NP-teljes X problémával.

A 3-SZÍN probléma

Tétel

A 3SZÍN *probléma* NP*-teljes.*

A 3-SZÍN probléma

Tétel

A 3SZÍN *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Már láttuk, hogy $\in$ NP*, belátható, hogy* SAT $\prec$ 3SZÍN.

Maximális méretű független pontrendszer gráfokban

MAXFTLEN

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Kérdés: Van-e G-nek k elemű független csúcshalmaza?

Tétel

A MAXFTLN *nyelv* NP*-teljes.*

Maximális méretű független pontrendszer gráfokban

MAXFTLEN

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Kérdés: Van-e G-nek k elemű független csúcshalmaza?

Tétel

A MAXFTLN *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

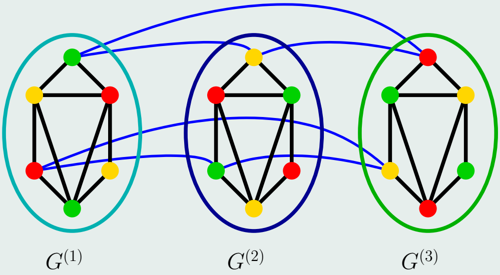
MAXFTLEN $\in$ NP*: tanú egy k-elemű $S \subseteq V(G)$ független csúcshalmaz.* $\surd$

Megadunk egy 3SZÍN $\prec$ MAXFTLEN *Karp-redukciót:* $G \to (G', k')$

$$G \in \text{3SZÍN} \Leftrightarrow (G', k') \in \text{MAXFTLEN}$$

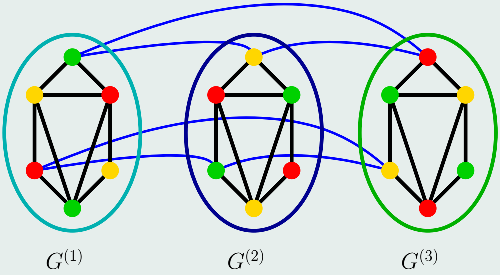
Bizonyítás.

G' megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.



Bizonyítás.

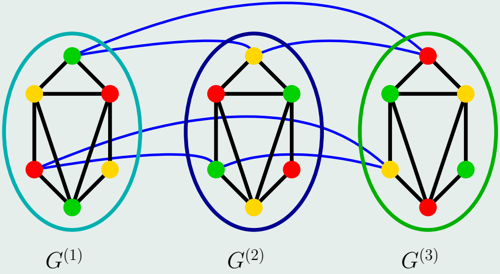
G' megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.



$|V(G')| = 3|V(G)|$ és
$|E(G')| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k' = |V(G)|$.

Bizonyítás.

G′ megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.

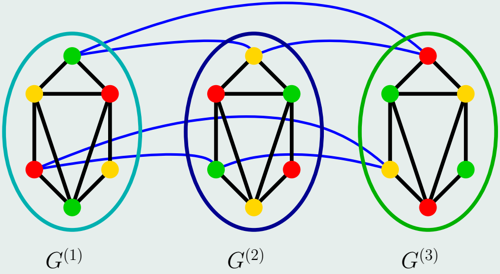


$|V(G')| = 3|V(G)|$ és
$|E(G')| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k' = |V(G)|$.

Ha G színezhető 3 színnel $\implies$ G' is $\implies$

Bizonyítás.

G' megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.

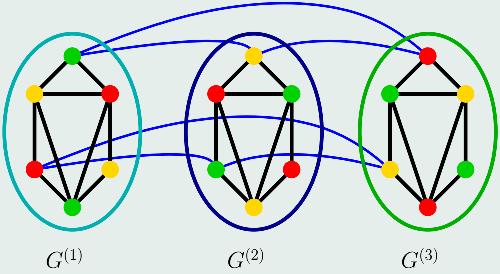


$|V(G')| = 3|V(G)|$ és
$|E(G')| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k' = |V(G)|$.

Ha G színezhető 3 színnel $\Longrightarrow$ G' is $\Longrightarrow$
a piros pontok halmaza G'-ben független és $|V(G)|$ van belőlük. $\surd$

Bizonyítás.

G' megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.

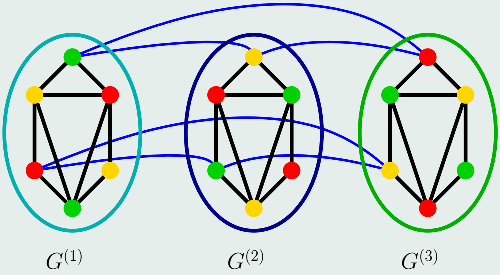


$|V(G')| = 3|V(G)|$ és
$|E(G')| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k' = |V(G)|$.

Ha G színezhető 3 színnel $\implies$ G' is $\implies$
a piros pontok halmaza G'-ben független és $|V(G)|$ van belőlük. $\surd$
Ha G'-ben van $|V(G)|$ független, akkor legyen S egy ilyen ponthalmaz G'-ben.

Bizonyítás.

G' megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.

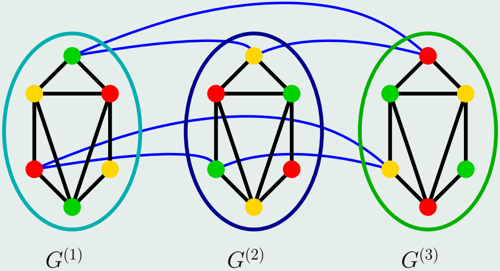


$|V(G')| = 3|V(G)|$ és
$|E(G')| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k' = |V(G)|$.

Ha G színezhető 3 színnel $\Longrightarrow$ G' is $\Longrightarrow$
a piros pontok halmaza G'-ben független és $|V(G)|$ van belőlük. $\surd$
Ha G'-ben van $|V(G)|$ független, akkor legyen S egy ilyen ponthalmaz G'-ben.
$\Longrightarrow$ Minden G-beli x pontnak pontosan 1 példányát tartalmazza S.

Bizonyítás.

G' megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.

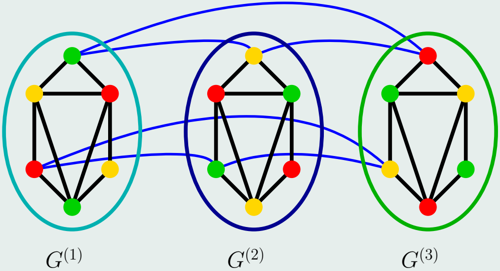


$|V(G')| = 3|V(G)|$ és
$|E(G')| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k' = |V(G)|$.

Ha G színezhető 3 színnel $\implies$ G' is $\implies$
a piros pontok halmaza G'-ben független és $|V(G)|$ van belőlük. $\surd$
Ha G'-ben van $|V(G)|$ független, akkor legyen S egy ilyen ponthalmaz G'-ben.
$\implies$ Minden G-beli x pontnak pontosan 1 példányát tartalmazza S.
$\implies$ Az x pont legyen sárga / piros / zöld, ha ez a példány $G^{(1)}$-ben / $G^{(2)}$-ben / $G^{(3)}$-ban van.

Bizonyítás.

G' megadása: Vegyük G három másolatát ($G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$), minden csúcs három példányát összekötjük.



$|V(G')| = 3|V(G)|$ és
$|E(G')| = 3|V(G)| + 3|E(G)|$,
legyen $k' = |V(G)|$.

Ha G színezhető 3 színnel $\Longrightarrow$ G' is $\Longrightarrow$
a piros pontok halmaza G'-ben független és $|V(G)|$ van belőlük. $\surd$
Ha G'-ben van $|V(G)|$ független, akkor legyen S egy ilyen ponthalmaz G'-ben.
$\Longrightarrow$ Minden G-beli x pontnak pontosan 1 példányát tartalmazza S.
$\Longrightarrow$ Az x pont legyen sárga / piros / zöld, ha ez a példány $G^{(1)}$-ben / $G^{(2)}$-ben / $G^{(3)}$-ban van. $\Longrightarrow$ ez jó színezés G-ben. $\surd$ $\square$

Maximális méretű klikk

MAXKLIKK

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Kérdés: Van-e G-ben k pontú teljes részgráf (k-klikk)?

Maximális méretű klikk

MAXKLIKK

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Kérdés: Van-e G-ben k pontú teljes részgráf (k-klikk)?

Tétel

A MAXKLIKK *nyelv* NP*-teljes.*

Maximális méretű klikk

MAXKLIKK

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Kérdés: Van-e G-ben k pontú teljes részgráf (k-klikk)?

Tétel

A MAXKLIKK nyelv NP-teljes.

Bizonyítás.

MAXKLIKK $\in \mathrm{NP}$: tanú egy k-elemű $S \subseteq V(G)$ teljes részgráf. $\surd$

Megadunk egy MAXFTLEN $\prec$ MAXKLIKK Karp-redukciót:

$f(G,k) = (\overline{G}, k)$ (független ponthalmaz a komplementerben teljes gráf). $\surd$ $\square$

Részgráf izomorfia probléma

RÉSZGÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok.

Kérdés: Van-e G-ben H-val izomorf részgráf?

Részgráf izomorfia probléma

RÉSZGÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok.
Kérdés: Van-e G-ben H-val izomorf részgráf?

Tétel

A RÉSZGRÁFIZO *nyelv* NP*-teljes.*

Részgráf izomorfia probléma

RÉSZGÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok.

Kérdés: Van-e G-ben H-val izomorf részgráf?

Tétel

A RÉSZGRÁFIZO *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

RÉSZGRÁFIZO $\in \mathrm{NP}$: tanú egy részgráf és annak izomorfiája H-val. $\surd$

Megadunk egy MAXKLIKK $\prec$ RÉSZGRÁFIZO Karp-redukciót:

$f(G, k) = (G, K_k)$. $\surd$

Részgráf izomorfia probléma

RÉSZGÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok.

Kérdés: Van-e G-ben H-val izomorf részgráf?

Tétel

A RÉSZGRÁFIZO *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

RÉSZGRÁFIZO $\in \mathrm{NP}$: tanú egy részgráf és annak izomorfiája H-val. $\surd$

Megadunk egy MAXKLIKK $\prec$ RÉSZGRÁFIZO Karp-redukciót:

$f(G, k) = (G, K_k)$. $\surd$ $\square$

Ha X NP-nehéz és Y általánosítása X-nek, akkor Y is NP-nehéz.

Részgráf izomorfia probléma

RÉSZGÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok.
Kérdés: Van-e G-ben H-val izomorf részgráf?

Tétel

A RÉSZGRÁFIZO *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

RÉSZGRÁFIZO $\in \mathrm{NP}$: tanú egy részgráf és annak izomorfiája H-val. $\surd$
Megadunk egy MAXKLIKK $\prec$ RÉSZGRÁFIZO Karp-redukciót:
$f(G,k) = (G, K_k)$. $\surd$ $\square$

Ha X NP-nehéz és Y általánosítása X-nek, akkor Y is NP-nehéz.
$\Longrightarrow$ RÉSZGRÁFIZO speciális esete a MAXKLIKK-nek $\Longrightarrow$ NP-nehéz.

Gráf izomorfia probléma

GRÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok.

Kérdés: Igaz-e, hogy G és H izomorfak?

Gráf izomorfia probléma

GRÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok.

Kérdés: Igaz-e, hogy G és H izomorfak?

Tétel

A GRÁFIZO *nyelv* NP*-beli.*

Gráf izomorfia probléma

GRÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok.

Kérdés: Igaz-e, hogy G és H izomorfak?

Tétel

A GRÁFIZO *nyelv* NP*-beli.*

Bizonyítás.

Tanú egy izomorfia a két gráf között. $\surd$

Gráf izomorfia probléma

GRÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok.

Kérdés: Igaz-e, hogy G és H izomorfak?

Tétel

A GRÁFIZO *nyelv* NP*-beli.*

Bizonyítás.

Tanú egy izomorfia a két gráf között. $\surd$ $\square$

Nem ismert, hogy a GRÁFIZO NP-nehéz-e és az sem, hogy P-beli-e.

Hamilton-kör probléma

Tétel

A H *nyelv* NP*-teljes.*

Hamilton-kör probléma

Tétel

A H *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Már láttuk, hogy H $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

Hamilton-kör probléma

Tétel

A H *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Már láttuk, hogy H $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

Belátható, hogy SAT $\prec$ H.

Hamilton-kör probléma

Tétel

A H *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Már láttuk, hogy H $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

Belátható, hogy SAT $\prec$ H. *(bonyolult)*

Hamilton-út probléma

Tétel

Az H-ÚT *nyelv* NP*-teljes.*

Hamilton-út probléma

Tétel

Az H-ÚT *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in$ NP, mert egy Hamilton-út tanú. $\surd$

Hamilton-út probléma

Tétel

Az H-ÚT *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in \mathrm{NP}$, mert egy Hamilton-út tanú. $\surd$

Belátjuk, hogy H $\prec$ H-ÚT.

Hamilton-út probléma

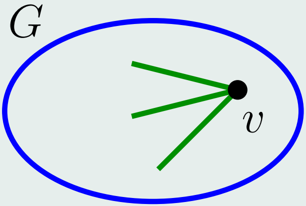
Tétel

Az H-ÚT *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in \mathrm{NP}$, mert egy Hamilton-út tanú. $\checkmark$

Belátjuk, hogy H $\prec$ H-ÚT.



Hamilton-út probléma

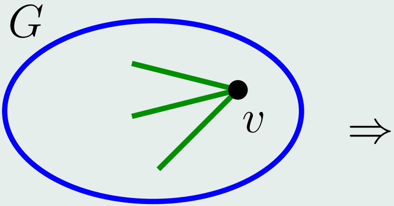
Tétel

Az H-ÚT *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in \mathrm{NP}$, mert egy Hamilton-út tanú. $\surd$

Belátjuk, hogy H $\prec$ H-ÚT.



Hamilton-út probléma

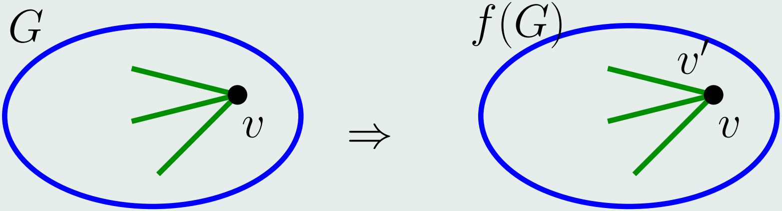
Tétel

Az H-ÚT *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in \mathrm{NP}$, mert egy Hamilton-út tanú. $\surd$

Belátjuk, hogy H $\prec$ H-ÚT.



Hamilton-út probléma

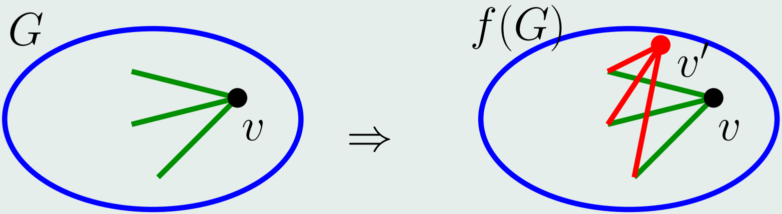
Tétel

Az H-ÚT *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in \mathrm{NP}$, mert egy Hamilton-út tanú. $\surd$

Belátjuk, hogy H $\prec$ H-ÚT.



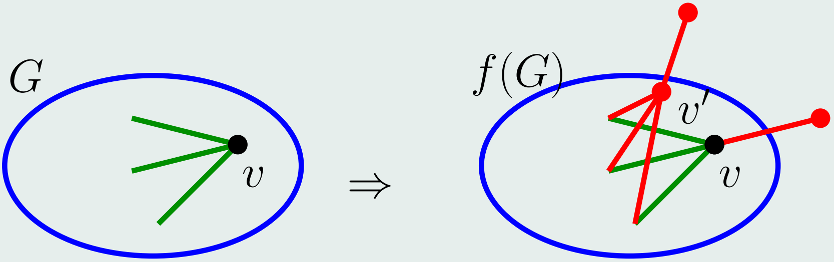
Hamilton-út probléma

Tétel

Az H-ÚT *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in$ NP, mert egy Hamilton-út tanú. $\surd$
Belátjuk, hogy H $\prec$ H-ÚT.



Hamilton-út probléma

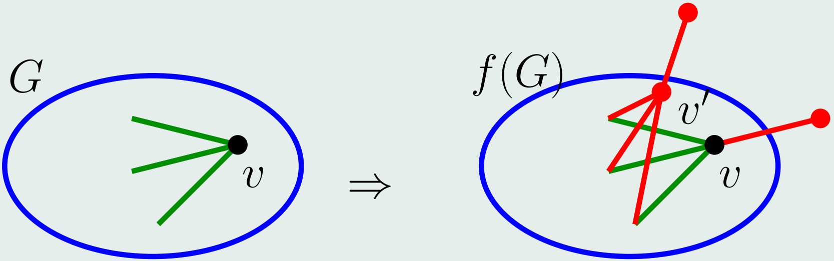
Tétel

Az H-ÚT *nyelv* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

H-ÚT $\in \mathrm{NP}$, mert egy Hamilton-út tanú. $\surd$

Belátjuk, hogy H $\prec$ H-ÚT.



G-ben akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha $f(G)$-ben van Hamilton-út. $\square$

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:

Adottak tárgyak $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyai, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:

Adottak tárgyak $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyai, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.
Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:

Adottak tárgyak $s_1, \dots, s_m > 0$ súlyai, ezek $v_1, \dots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.

Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.

A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, .., m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:

Adottak tárgyak $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyai, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.

Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.

A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, .., m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.

$\Longrightarrow$

HÁT

Bemenet: $s_1, \ldots, s_m; v_1 \ldots, v_m; b; k$.

Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$ és $\sum_{i \in I} v_i \geq k$?

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:

Adottak tárgyak $s_1, \ldots, s_m > 0$ súlyai, ezek $v_1, \ldots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.
Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.
A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, .., m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.

$\Longrightarrow$

HÁT

Bemenet: $s_1, \ldots, s_m$; $v_1 \ldots, v_m$; b; k.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$ és $\sum_{i \in I} v_i \geq k$?

Lemma

HÁT $\in \mathrm{NP}$

Vegyük azt a speciális esetet, amikor $s_i = v_i$ és $b = k$. $\Longrightarrow$

A Részhalmaz összeg probléma

RH

Bemenet: $(s_1, \ldots, s_m; b)$.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?

Tétel

Az RH nyelv NP-teljes.

A Részhalmaz összeg probléma

RH

Bemenet: $(s_1, \ldots, s_m; b)$.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?

Tétel

Az RH nyelv NP*-teljes.*

Bizonyítás.

RH $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

A Részhalmaz összeg probléma

RH

Bemenet: $(s_1, \ldots, s_m; b)$.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?

Tétel

Az RH nyelv NP-teljes.

Bizonyítás.

RH $\in \mathrm{NP}$. $\surd$
Belátható, hogy SAT $\prec$ RH.

A Részhalmaz összeg probléma

RH

Bemenet: $(s_1, \ldots, s_m; b)$.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?

Tétel

Az RH nyelv NP*-teljes.*

Bizonyítás.

RH $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

Belátható, hogy SAT $\prec$ RH.

Speciális eset: Partíció feladat: ahol $b = \frac{1}{2} \sum s_i$.

PARTÍCIÓ

Bemenet: $(s_1, \ldots, s_m)$.
Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ melyre
$\sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} s_i$?

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Partíció $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Partíció $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció*, pedig RH általánosabb!

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Partíció $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció*, pedig RH általánosabb!

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Partíció $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció*, pedig RH általánosabb!

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.

$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Partíció $\in \mathrm{NP}$. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció*, pedig RH általánosabb!

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.

$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.

$f(x) = (s_1, \ldots, s_m, s + 1 - b, b + 1)$.

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Partíció $\in$ NP. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció*, pedig RH általánosabb!

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.

$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.

$f(x) = (s_1, \ldots, s_m, s + 1 - b, b + 1)$.

A számok összege $2s + 2$, az utolsó két szám nem lehet egy partíció ugyanazon osztályában, mert az összegük túl nagy: $s + 2 > \frac{1}{2}(2s + 2)$.

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Partíció $\in$ NP. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció*, pedig RH általánosabb!

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.

$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \le s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.

$f(x) = (s_1, \ldots, s_m, s + 1 - b, b + 1)$.

A számok összege $2s + 2$, az utolsó két szám nem lehet egy partíció ugyanazon osztályában, mert az összegük túl nagy: $s + 2 > \frac{1}{2}(2s + 2)$.

RH-nak megoldása az $R \subset \{s_1, ..., s_m\}$ számhalmaz

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Partíció $\in$ NP. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció*, pedig RH általánosabb!

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \ldots, s_m; b)$ inputját.

$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.

$f(x) = (s_1, \ldots, s_m, s + 1 - b, b + 1)$.

A számok összege $2s + 2$, az utolsó két szám nem lehet egy partíció ugyanazon osztályában, mert az összegük túl nagy: $s + 2 > \frac{1}{2}(2s + 2)$.

RH-nak megoldása az $R \subset \{s_1, ..., s_m\}$ számhalmaz$\Leftrightarrow$ a megoldáshoz vegyük hozzá $(s + 1 - b)$-t

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

Partíció $\in$ NP. $\surd$

Belátjuk, hogy RH $\prec$*Partíció*, pedig RH általánosabb!

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \dots, s_m; b)$ inputját.

$\Longrightarrow$ Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^{m} s_i$.

$f(x) = (s_1, \dots, s_m, s+1-b, b+1)$.

A számok összege $2s+2$, az utolsó két szám nem lehet egy partíció ugyanazon osztályában, mert az összegük túl nagy: $s+2 > \frac{1}{2}(2s+2)$.

RH-nak megoldása az $R \subset \{s_1, ..., s_m\}$ számhalmaz$\Leftrightarrow$ a megoldáshoz vegyük hozzá $(s+1-b)$-t $\Leftrightarrow$ PARTÍCIÓ-nak megoldása az $R \cup \{s+1-b\}$ számhalmaz. $\square$

A Lineáris Programozás probléma

LP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \dots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.
Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \dots, x_m$ számok, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

A Lineáris Programozás probléma

LP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.

Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ számok, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1x_1 + \ldots + c_mx_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket?

A Lineáris Programozás probléma

LP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.
Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ számok, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1x_1 + \ldots + c_mx_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket?

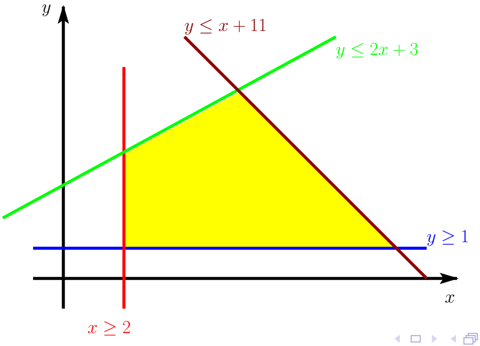
A Lineáris Programozás probléma

LP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.

Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ számok, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

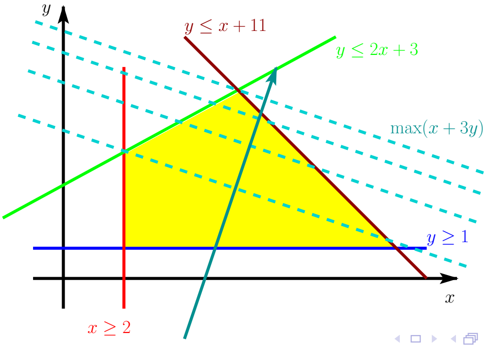
Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1x_1 + \ldots + c_mx_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket?



A Lineáris Programozás probléma
LP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.
Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ számok, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket?



A Lineáris Programozás probléma

Tétel

A Lineáris Programozás probléma P*-ben van.*

A Lineáris Programozás probléma

Tétel

A Lineáris Programozás probléma P*-ben van.*

Legjobb algoritmus (Karmarkar): $v^{3,5}e$, ahol v a változók száma, e az egyenletek „összmérete”.

Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

IP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.

Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egészek, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

IP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.

Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egészek, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket és mindegyik egész?

Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

IP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.
Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egészek, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

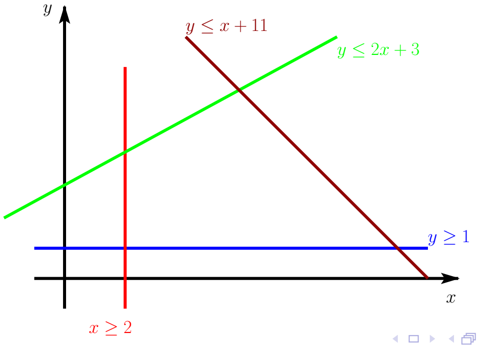
Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket és mindegyik egész?

Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

IP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.
Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egészek, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1x_1 + \ldots + c_mx_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket és mindegyik egész?



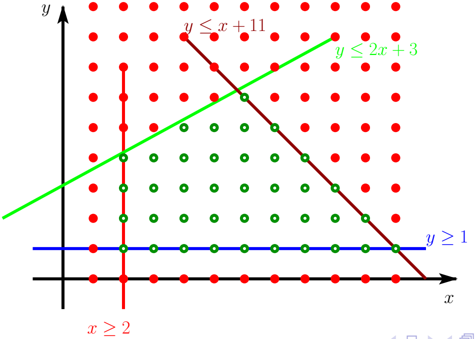
Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

IP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.

Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egészek, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket és mindegyik egész?



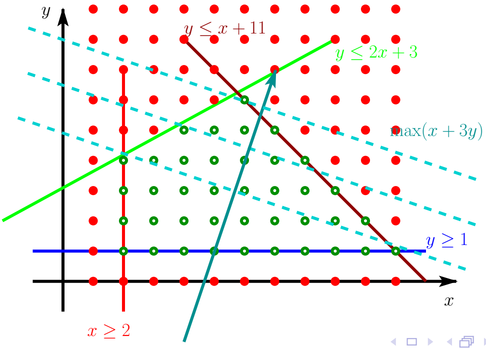
Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

IP

Bemenet: Az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ változókat tartalmazó lineáris egyenlőtlenségek.

Kérdés: Vannak-e olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ egészek, amelyek kielégítik az összes egyenlőtlenséget?

Optimalizációs változat: Mekkora $\max(c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m)$, ha $x_1, x_2, \ldots x_m$ kielégíti az egyenlőtlenségeket és mindegyik egész?



Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

Tétel

Az IP *probléma* NP*-teljes.*

Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

Tétel

Az IP *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

IP $\in \mathrm{NP}$: tanú egy megoldás, (bár nehéz belátni, hogy a megoldás polinom méretű!) $\surd$

Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

Tétel

Az IP *probléma* NP*-teljes.*

Bizonyítás.

IP $\in \mathrm{NP}$: tanú egy megoldás, (bár nehéz belátni, hogy a megoldás polinom méretű!) $\surd$

Belátjuk, hogy SAT $\prec$ IP

Az Egészértékű Lineáris Programozás probléma

Tétel

Az IP probléma NP*-teljes.*

Bizonyítás.

IP $\in \mathrm{NP}$: tanú egy megoldás, (bár nehéz belátni, hogy a megoldás polinom méretű!) $\surd$

Belátjuk, hogy SAT $\prec$ IP

$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_6) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_5 \vee \neg x_6) \Longrightarrow$

$0 \le x_1 \le 1; 0 \le x_2 \le 1; \ldots ; 0 \le x_6 \le 1$
$x_1 + (1 - x_2) + x_5 \ge 1$
$x_2 + (1 - x_3) + x_6 \ge 1$
$(1 - x_2) + x_3 + x_5 + (1 - x_6) \ge 1$

$\square$