Algoritmuselmélet

Függvények nagyságrendje, elágazás és korlátozás, dinamikus programozás

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

1. előadás

Algoritmus fogalma

- Egyelőre nem definiáljuk rendesen az algoritmus fogalmát.
- Eljárás, recept, módszer.
- Jól meghatározott lépések egymásutánja, amelyek már elég pontosan, egyértelműen megfogalmazottak ahhoz, hogy gépiesen végrehajthatók legyenek.

A szó eredete

Al Khvarizmi (Mohamed ibn Músza) bagdadi matematikus a IX. században könyvet írt az egészekkel való alapműveletek végzéséről.

$$\text{algoritmus} \leftrightarrow \text{számítógép program}$$

$$\text{valós probléma} \Longrightarrow \text{absztrakt modell} \Longrightarrow \text{algoritmus} \Longrightarrow \text{program}$$

Cél: feladatokra hatékony eljárás kidolgozása
Hatékony $\Longrightarrow$ gyors, kevés memória, kevés tárhely

Milyen hatékony egy algoritmus?

- Legtöbbször csak a lépésszám nagyságrendje érdekes. Hogyan függ a lépésszám az input méretétől?
- Az input méretét legtöbbször n-nel jelöljük.
- A lépésszám ennek egy f függvénye, azaz ha n méretű az input, akkor az algoritmus $f(n)$ lépést végez.
- Igazából az f függvény az érdekes.
- $100n$ vagy $101n$, általában mindegy
- n^2 vagy n^3 már sokszor nagy különbség, de néha mindegy
- n^2 vagy 2^n már mindig nagy különbség

Például

Kérdés

Egy 10^{10} művelet/mp sebességű számítógép mennyi ideig dolgozik, ha $f(n)$ műveletet kell végrehajtani n méretű bemenetre?

n	$f(n)$ n	n^2	$\log_{10} n$	2^n	$n!$
10	10^{-9}	10^{-8}	10^{-10}	$1{,}02 \cdot 10^{-7}$	$3{,}6 \cdot 10^{-4}$
10^2	10^{-8}	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{12}$ év	$2.9{,}\cdot 10^{140}$ év
10^6	10^{-4}	100	$6 \cdot 10^{-10}$	$3{,}1 \cdot 10^{301.012}$ év	$2{,}6 \cdot 10^{5.565.691}$ év
10^9	0,1	3,1 év	$9 \cdot 10^{-9}$	sok év	sok év

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f(n)$ és $g(n)$ az $\mathbb{R}^+$ egy részhalmazán értelmezett, valós értékeket felvevő függvények, akkor $f = O(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $|f(n)| \leq c|g(n)|$ teljesül, ha $n \geq n_0$.

Példák

- $100n + 300 = O(n)$
  Biz: $100n + 300 \leq 100n + n \leq 101n \leq cn$, ha $n \geq 300,\ c = 101$
- $5n^2 + 3n = O(n^2)$
  Biz: $5n^2 + 3n \leq 5n^2 + 3n^2 \leq 8n^2 \leq cn^2$, ha $n \geq 100,\ c = 8$
- $n^4 + 5n^3 = O(n^5)$
  Biz: $n^4 + 5n^3 \leq 6n^4 \leq n^5 \leq cn^5$, ha $n \geq 6,\ c = 1$

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1, n_0 = 10^6$.
  $n = 10^6$-re igaz, mert $10^{6000} \leq (2^4)^{6000} \leq 2^{10^6}$.
  Tegyük fel, hogy k-ra igaz.
  Felhasználjuk, hogy ha $k \geq 10^6$ akkor
  $\binom{1000}{i} \leq 1000^i = 1000 \cdot 1000^{i-1} \leq 1000^{i-1} \cdot 1000^{i-1} =$
  $= (10^6)^{i-1} \leq k^{i-1}$.
  $(k+1)^{1000} = k^{1000} + \cdots + \binom{1000}{i} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + \cdots +$
  $k^{i-1} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + 1000k^{999} \leq 2 \cdot k^{1000} \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$,
  ha $k \geq 10^6$.
- $\log_2^{1000}(n) = O(n)$
  Biz: Mivel a logaritmus függvény monoton nő, vehetjük a fentiek logaritmusát.
- $2^n = O(n!)$
- $n! = O(n^n)$

Példák

Igaz-e, hogy $n^2 = O(n)$?

Nem.
Biz: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik olyan c, n_0, hogy $n^2 \leq cn$ teljesül minden $n \geq n_0$ esetén.
Ekkor $n \leq c$ teljesül minden $n \geq n_0$ esetén, ami nyilván nem igaz, ha $n > c$.

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f(n)$ és $g(n)$ az $\mathbb{R}^+$ egy részhalmazán értelmezett, valós értékeket felvevő függvények, akkor $f = \Omega(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $|f(n)| \geq c|g(n)|$ teljesül, ha $n \geq n_0$.

Például:

- $100n - 300 = \Omega(n)$, hiszen $n > 300,\ c = 99$-re teljesülnek a feltételek
- $5n^2 - 3n = \Omega(n^2)$
- $n^4 - 5n^3 = \Omega(n^4)$
- $2^n = \Omega(n^{1000})$

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f = O(g)$ és $f = \Omega(g)$ is teljesül, akkor $f = \Theta(g)$.

Például:

- $100n - 300 = \Theta(n)$
- $5n^2 - 3n = \Theta(n^2)$
- $n^4 - 5n^3 = \Theta(n^4)$
- $1000 \cdot 2^n = \Theta(2^n)$

Függvények nagyságrendje

Definíció

Legyenek $f(n)$ és $g(n)$ a pozitív egészeken értelmezett, valós értékű függvények. Ekkor az $f = o(g)$ jelöléssel rövidítjük azt, hogy

$$\frac{f(n)}{g(n)} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Például:

- $100n + 300 = o(n^2)$, hiszen $\frac{100n+300}{n^2} \to 0$ ha $n \to \infty$
- $5n^2 + 3n = o(n^3)$
- $n^4 + 5n^3 = o(n^4 \log_2 n)$
- $n^{1000} = o(2^n)$

Algoritmikus problémák megoldása

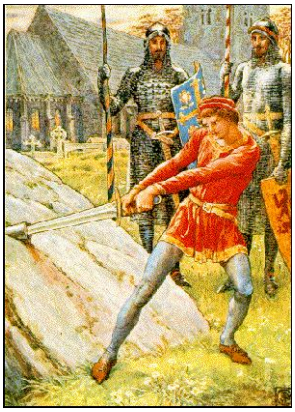
$$\boxed{\text{Algoritmikus probléma}} \xrightarrow{\mathcal{A}} \boxed{\text{modell}} \xrightarrow{\mathcal{B}} \boxed{\text{program}}$$

$\mathcal{A}$: pontosítás, egyszerűsítés, absztrakció, lényegtelen elemek kiszűrése, a lényeg kihámozása

Modell: sokféle lehet, elég tág, de elég egyszerű, formalizált, pontos

$\mathcal{B}$: hatékony algoritmus, bemenő adatok $\rightarrow$ eredmény, érdemes foglalkozni a kapott algoritmus *elemzésével, értékelésével*, megvizsgálva, hogy a módszer mennyire hatékony

Arthur király civilizációs törekvései

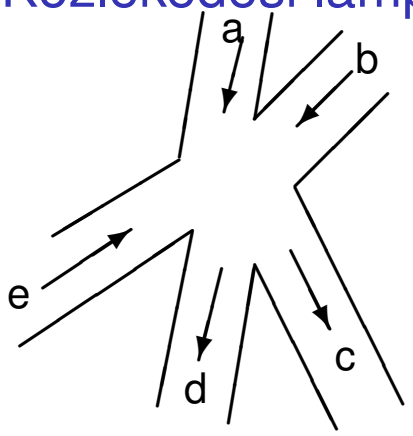


Arthur király fényes udvarában 150 lovag és 150 udvarhölgy él. A király, aki közismert civilizációs erőfeszítéseiről, elhatározza, hogy megházasítja jó lovagjait és szép udvarhölgyeit. Mindezt persze emberségesen szeretné tenni. Csak olyan párok egybekelését akarja, amelyek tagjai kölcsönösen vonzalmat éreznek egymás iránt. Hogyan fogjon hozzá?

Természetesen pártfogójához, a nagyhatalmú varázslóhoz, Merlinhez fordul. Merlin rögvest felismeri, hogy itt is bináris szimmetrikus viszonyok ábrázolásáról van szó.

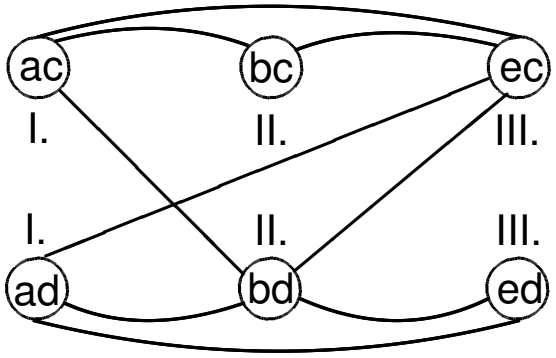
Nagy darab pergament vesz elő, és nekilát egy páros gráfot rajzolni. A királyi parancs teljesítéséhez Merlinnek élek egy olyan rendszerét kell kiválasztania a gráf éleiből, hogy a kiválasztott élek közül a gráf minden pontjához pontosan egy csatlakozzon. A kiválasztott élek felelnek meg a tervezett házasságoknak. A gráfelmélet nyelvén teljes párosítást kell keresnie.

Közlekedési lámpák ütemezése



lámpák: ac, ad, bc, bd, ec és ed
állapot: lámpák $\rightarrow \{P, Z\}$

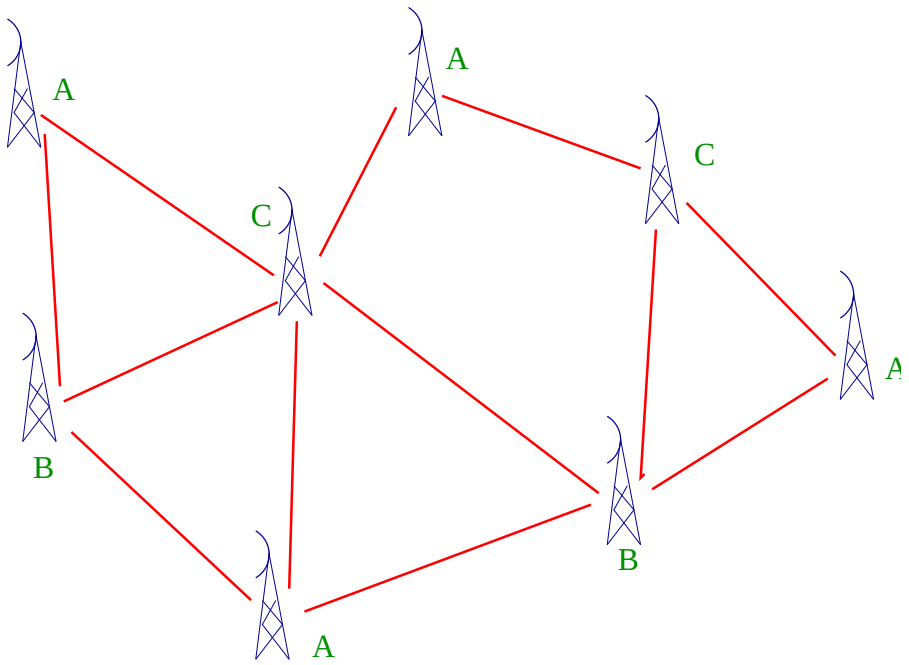
Feladat: Mennyi a minimális számú állapot, ami biztonságos és nem okoz örök dugót?



Gráfelméleti nyelven: Mennyi G kromatikus száma?

Mobiltelefon-átjátszók frekvencia kiosztása

Egy adott átjátszóhoz egy adott frenkvenciát rendelnek.
Egy telefon a közelben levő átjátszók közül választ.
„Közel levő” átjátszók frekvenciája különbözzön.



Elágazás és korlátozás

Legtöbbször van c^n-es algoritmus, de nem mindegy mekkora c.

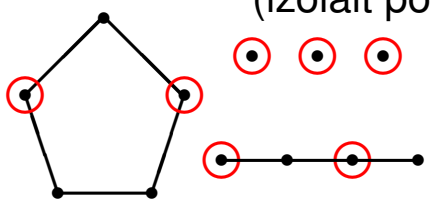
Bontsunk esetekre, azokat alesetekre, ... $\Longrightarrow$ fa
Értékeljük az eseteket $\Longrightarrow$ bizonyos irányokba nem kell továbbmenni.
$\Longrightarrow$ (korlátozó heurisztika)
Pl. sakkállások

Feladat: Keressünk maximális méretű független ponthalmazt egy adott G gráfban.
Nyilvánvaló módszer:
Minden részhalmazt végignézünk $\Longrightarrow$ $O(2^n)$ lépés

Jobb algoritmus

Észrevétel: *Ha G-ben minden pont foka legfeljebb kettő, akkor a feladat lineáris időben megoldható: G izolált pontok, utak és körök diszjunkt uniója.* $\Longrightarrow$ *komponensenként minden „második" pontot bevesszük a halmazba.*

(izolált pontok)



MF(G)
1. Ha G-ben minden pont foka ≤ 2, akkor MF(G) az előbbi eljárás által adott maximális független halmaz, és a munkát befejeztük.
2. Legyen $x \in G$, $fok(x) \geq 3$.
   $S_1 := \mathrm{MF}(G \setminus \{x\})$
   $S_2 := \{x\} \cup \mathrm{MF}(G \setminus \{x \text{ és szomszédai}\})$.
3. Legyen S az S_1 és S_2 közül a nagyobb méretű, illetve akármelyik, ha $|S_1| = |S_2|$.
4. $\mathrm{MF}(G) := S$.

Legyen $T(n)$ az MF(G)-n ($| V(G) | \leq n$) belüli MF hívások maximális száma, beleértve MF(G)-t magát is.

Tétel

Van olyan c állandó, hogy $T(n) \leq c\gamma^n$, tetszőleges n természetes számra, ahol γ a $\gamma^4 - \gamma^3 - 1 = 0$ egyenlet pozitív gyöke ($\gamma \approx 1,381$).

Bizonyítás.

Legyen $t(n) := T(n) + 1$.
$T(n) \leq T(n-1) + T(n-4) + 1$, ha $n > 4$. $\Longrightarrow$
$t(n) \leq t(n-1) + t(n-4)$, ha $n > 4$.
Indukcióval: $t(n) \leq c\gamma^n$ igaz$n < 5$-re elég nagy c-vel $\surd$
$\Longrightarrow$ Ezután, ha $n \geq 5$, indukciós feltevésből:

$$\begin{aligned} t(n) &\leq t(n-1) + t(n-4) \leq c\gamma^{n-1} + c\gamma^{n-4} = \\ &= c\gamma^{n-4}(\gamma^3 + 1) = c\gamma^{n-4}\gamma^4 = c\gamma^n. \end{aligned}$$

$\square$

Összköltség: $O(n^d T(n)) = O(n^d \gamma^n) = O(1,381^n)$.

3-színezés keresése

Feladat: Adott G, keressünk egy 3-színezést.

Minden lehetséges színezést végignézünk $\Longrightarrow$ $O(3^n)$ lépés

Ötlet: Bizonyos csúcsokat kiszínezünk pirosra, a többiről polinom időben el tudjuk dönteni, hogy kiszínezhetők-e kékkel és sárgával.

Összköltség: $O(2^n n^c)$.

Dinamikus programozás

Optimum meghatározása kisebb részfeladatok optimumainak felhasználásával.

Általában egy táblázat kitöltése, az új elemeket a korábban kitöltött elemekből számoljuk.

Binomiális együtthatók kiszámítása

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \binom{0}{0} & & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\
\binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
\end{array}$$

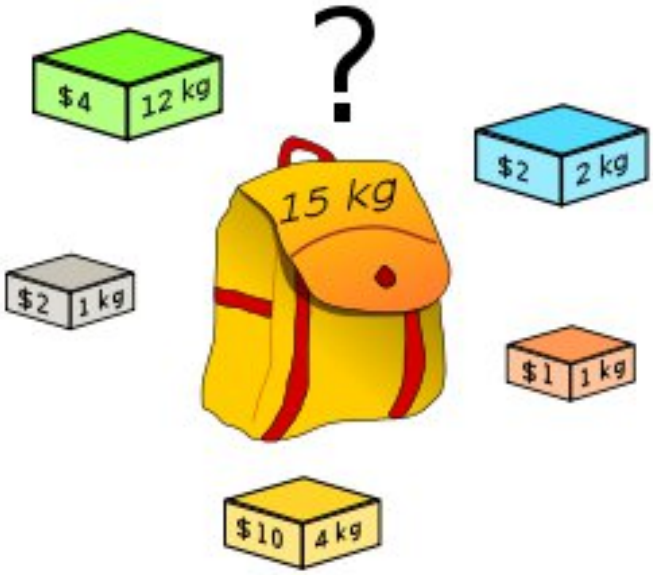
Tétel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

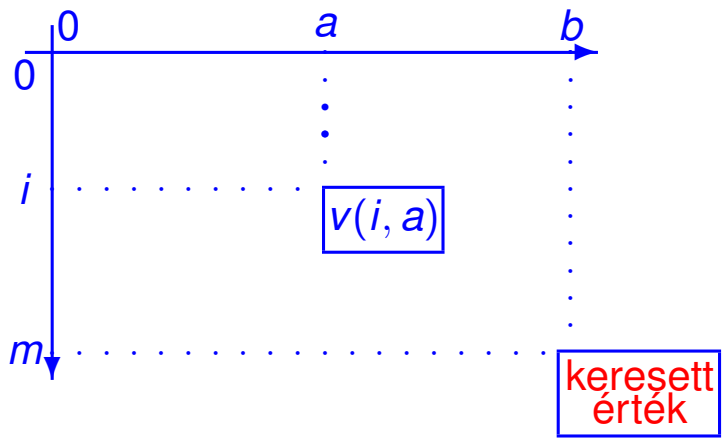
Hátizsák probléma

Probléma

Adottak az $s_1, \ldots, s_m$ súlyok, a b súlykorlát és a $v_1, \ldots, v_m$ értékek. (Minden érték pozitív egész.) Melyik az az $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ részhalmaz, melyre teljesül, hogy $\sum_{i \in I} s_i \leq b$ és $\sum_{i \in I} v_i$ maximális?



Először kisebb problémára oldjuk meg: $v(i, a)$ a maximális elérhető érték az $s_1, \ldots, s_i$ súlyokkal, $v_1, \ldots, v_i$ értékekkel és a súlykorláttal megadott feladatra.
Ekkor $v(0, a) = v(i, 0) = 0 \; \forall a, i$-re
cél $\rightarrow v(m, b)$



$$v(i, a) = \max\{v(i-1, a); v_i + v(i-1, a - s_i)\}$$

$\Longrightarrow$ Soronként kitölthető $\Longleftarrow$ minden érték két felette levőből számolható.
Összköltség: $O(bL)$
b-től függ (nem $\log b$-től!), ha b sokjegyű szám, ez sok idő