# Adatbázisok elmélete 12. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu
http://www.cs.bme.hu/˜kiskat

2005

# Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett

# Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett
(Objektumosnak nincs ilyen.)

# Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett
(Objektumosnak nincs ilyen.)

*Kérdés:*

- Mik a jó relációk?

# Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett
(Objektumosnak nincs ilyen.)

*Kérdés:*

- Mik a jó relációk?
- Milyen relációkat érdemes tárolni?

# Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett
(Objektumosnak nincs ilyen.)

*Kérdés:*

- Mik a jó relációk?
- Milyen relációkat érdemes tárolni?
- Hogyan alakíthatunk tetszőleges relációkat jókká?

# Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett
(Objektumosnak nincs ilyen.)

*Kérdés:*

- Mik a jó relációk?
- Milyen relációkat érdemes tárolni?
- Hogyan alakíthatunk tetszőleges relációkat jókká?

Cél: El akarunk kerülni kellemetlen jelenségeket, **anomáliákat:**

# Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett
(Objektumosnak nincs ilyen.)

*Kérdés:*

- Mik a jó relációk?
- Milyen relációkat érdemes tárolni?
- Hogyan alakíthatunk tetszőleges relációkat jókká?

Cél: El akarunk kerülni kellemetlen jelenségeket, **anomáliákat:**

- *Módosítási anomália:* pl. ha a Termék(Termelő, Cím, Terméknév, Ár) reláció esetén egy termelő címe több sorban is előfordul, változáskor mindenhol át kell írni. Hiba esetén inkonzisztencia.

# Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett
(Objektumosnak nincs ilyen.)

*Kérdés:*

- Mik a jó relációk?
- Milyen relációkat érdemes tárolni?
- Hogyan alakíthatunk tetszőleges relációkat jókká?

Cél: El akarunk kerülni kellemetlen jelenségeket, **anomáliákat:**

- *Módosítási anomália:* pl. ha a Termék(Termelő, Cím, Terméknév, Ár) reláció esetén egy termelő címe több sorban is előfordul, változáskor mindenhol át kell írni. Hiba esetén inkonzisztencia.
- *Beszúrási anomália:* Nem tudunk beszúrni adatot, ha az egyik attribútum hiányzik, mert nem ismerjük (és nem lehet NULL).

# Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett
(Objektumosnak nincs ilyen.)

*Kérdés:*

- Mik a jó relációk?
- Milyen relációkat érdemes tárolni?
- Hogyan alakíthatunk tetszőleges relációkat jókká?

Cél: El akarunk kerülni kellemetlen jelenségeket, **anomáliákat:**

- *Módosítási anomália:* pl. ha a Termék(Termelő, Cím, Terméknév, Ár) reláció esetén egy termelő címe több sorban is előfordul, változáskor mindenhol át kell írni. Hiba esetén inkonzisztencia.
- *Beszúrási anomália:* Nem tudunk beszúrni adatot, ha az egyik attribútum hiányzik, mert nem ismerjük (és nem lehet NULL).
- *Törlési anomália:* Csak egész sorok törölhetők, így elveszhetnek hasznos adatok. Pl. ha egy termelő épp nem termel semmit, kitöröljük a címét is.

# Relációs sémák tervezése

A relációk, tárolás jósága attól függ, hogy milyen megkötések vannak az adatokon.

# Relációs sémák tervezése

A relációk, tárolás jósága attól függ, hogy milyen megkötések vannak az adatokon.

Megszorítások két osztálya:

- *Értékfüggő:* Pl. ÁR$\geq$ $\mathbf{0}$, ÉLETKOR egész $\leq$ $\mathbf{1000}$, NÉV karaktersor, CÍM$\neq$NULL, (típusleírások)

# Relációs sémák tervezése

A relációk, tárolás jósága attól függ, hogy milyen megkötések vannak az adatokon.

Megszorítások két osztálya:

- *Értékfüggő:* Pl. ÁR$\geq \mathbf{0}$, ÉLETKOR egész $\leq \mathbf{1000}$, NÉV karaktersor, CÍM$\neq$NULL, (típusleírások)
- *Értékfüggetlen:* TERMÉKNÉV, TERMELŐ kulcs; $\forall$ TERMELŐ-nek egy címe van, egy TERMELŐ azonos nevű termékéből csak egy árú van

## Relációs sémák tervezése

A relációk, tárolás jósága attól függ, hogy milyen megkötések vannak az adatokon.

Megszorítások két osztálya:

- *Értékfüggő:* Pl. ÁR$\geq 0$, ÉLETKOR egész $\leq 1000$, NÉV karaktersor, CÍM$\neq$NULL, (típusleírások)
- *Értékfüggetlen:* TERMÉKNÉV, TERMELŐ kulcs; $\forall$ TERMELŐ-nek egy címe van, egy TERMELŐ azonos nevű termékéből csak egy árú van

Utóbbi: az attribútumok mennyire függenek egymástól $\Longrightarrow$ **funkcionális függőség**

# Funkcionális függőségek

*Jelölés:* $R(A_1, \ldots, A_n)$ reláció, $X$ attribútum halmaz $\Longrightarrow X \subseteq R$
$X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ helyett $X = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}$

## Funkcionális függőségek

*Jelölés:* $R(A_1, \ldots, A_n)$ reláció, $X$ attribútum halmaz $\Longrightarrow X \subseteq R$
$X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ helyett $X = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}$

**Definíció.** ***$Y \subseteq R$ funkcionálisan függ $X \subseteq R$-től***, (*jelölés:* $X \to Y$), *ha $R$ bármely két sorára igaz, hogy ha ők megegyeznek $X$-en, akkor $Y$-on is megegyeznek.*

# Funkcionális függőségek

*Jelölés:* $\boldsymbol{R(A_1, \ldots, A_n)}$ reláció, $\boldsymbol{X}$ attribútum halmaz $\Longrightarrow \boldsymbol{X \subseteq R}$

$\boldsymbol{X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}}$ helyett $\boldsymbol{X = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}}$

**Definíció.** $\boldsymbol{Y \subseteq R}$ ***funkcionálisan függ*** $\boldsymbol{X \subseteq R}$***-től***, (*jelölés:* $\boldsymbol{X \to Y}$), *ha* $\boldsymbol{R}$ *bármely két sorára igaz, hogy ha ők megegyeznek* $\boldsymbol{X}$*-en, akkor* $\boldsymbol{Y}$*-on is megegyeznek.*

Pl. $\boldsymbol{X}$ =TERMELŐ, TERMÉKNÉV; $\boldsymbol{Y}$=ÁR $\Longrightarrow \boldsymbol{X \to Y}$

# Funkcionális függőségek

*Jelölés:* $\boldsymbol{R(A_1, \ldots, A_n)}$ reláció, $\boldsymbol{X}$ attribútum halmaz $\Longrightarrow \boldsymbol{X \subseteq R}$
$\boldsymbol{X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}}$ helyett $\boldsymbol{X = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}}$
**Definíció.** ***$Y \subseteq R$ funkcionálisan függ $X \subseteq R$-től***, (*jelölés: $X \rightarrow Y$*), *ha $\boldsymbol{R}$ bármely két sorára igaz, hogy ha ők megegyeznek $\boldsymbol{X}$-en, akkor $\boldsymbol{Y}$-on is megegyeznek.*

Pl. $X$ =TERMELŐ, TERMÉKNÉV; $Y$=ÁR $\Longrightarrow X \rightarrow Y$

*Megjegyzések:*

- Azok az érdekes összefüggések, amik minden ilyen attribútumokkal rendelkező táblában fenn kell, hogy álljanak: axiómaszerű feltételek, az adatbázis bármely változása esetén is fennállnak $\Longrightarrow$ *érdemi függés*

# Funkcionális függőségek

*Jelölés:* $R(A_1, \ldots, A_n)$ reláció, $X$ attribútum halmaz $\Longrightarrow X \subseteq R$
$X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ helyett $X = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}$
**Definíció.** *$Y \subseteq R$ **funkcionálisan függ** $X \subseteq R$-**től**, (jelölés: $X \to Y$), ha $R$ bármely két sorára igaz, hogy ha ők megegyeznek $X$-en, akkor $Y$-on is megegyeznek.*

Pl. $X$ =TERMELŐ, TERMÉKNÉV; $Y$=ÁR $\Longrightarrow X \to Y$

*Megjegyzések:*

- Azok az érdekes összefüggések, amik minden ilyen attribútumokkal rendelkező táblában fenn kell, hogy álljanak: axiómaszerű feltételek, az adatbázis bármely változása esetén is fennállnak $\Longrightarrow$ *érdemi függés*
  Azok, amik csak véletlenül, csak egy pillanatban állnak fenn $\Longrightarrow$ *eseti függés*
  (ezek nem érdekelnek, például lehetséges hogy egy adott pillanatban minden ár csak egyszer szerepel és ekkor úgy tűnik, mintha Ár$\to$ Termék érvényes függés lenne)

# Funkcionális függőségek

*Jelölés:* $R(A_1, \ldots, A_n)$ reláció, $X$ attribútum halmaz $\Longrightarrow X \subseteq R$
$X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ helyett $X = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}$
**Definíció.** ***$Y \subseteq R$ funkcionálisan függ $X \subseteq R$-től***, (*jelölés:* $X \to Y$), *ha $R$ bármely két sorára igaz, hogy ha ők megegyeznek $X$-en, akkor $Y$-on is megegyeznek.*

Pl. $X$ =TERMELŐ, TERMÉKNÉV; $Y$=ÁR $\Longrightarrow X \to Y$

*Megjegyzések:*

- Azok az érdekes összefüggések, amik minden ilyen attribútumokkal rendelkező táblában fenn kell, hogy álljanak: axiómaszerű feltételek, az adatbázis bármely változása esetén is fennállnak $\Longrightarrow$ *érdemi függés*
  Azok, amik csak véletlenül, csak egy pillanatban állnak fenn $\Longrightarrow$ *eseti függés*
  (ezek nem érdekelnek, például lehetséges hogy egy adott pillanatban minden ár csak egyszer szerepel és ekkor úgy tűnik, mintha Ár$\to$ Termék érvényes függés lenne)
- Tehát az érdemi függések megadása modellezési kérdés: a séma megadásakor döntjük el, hogy milyen függéseket akarunk fenntartani mindenáron.

# Funkcionális függőségek

*Jelölés:* $R(A_1, \ldots, A_n)$ reláció, $X$ attribútum halmaz $\Longrightarrow X \subseteq R$
$X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ helyett $X = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}$
**Definíció.** ***$Y \subseteq R$ funkcionálisan függ $X \subseteq R$-től***, (*jelölés:* $X \to Y$), *ha $R$ bármely két sorára igaz, hogy ha ők megegyeznek $X$-en, akkor $Y$-on is megegyeznek.*

Pl. $X$ =TERMELŐ, TERMÉKNÉV; $Y$=ÁR $\Longrightarrow X \to Y$

*Megjegyzések:*

- Azok az érdekes összefüggések, amik minden ilyen attribútumokkal rendelkező táblában fenn kell, hogy álljanak: axiómaszerű feltételek, az adatbázis bármely változása esetén is fennállnak $\Longrightarrow$ *érdemi függés*
  Azok, amik csak véletlenül, csak egy pillanatban állnak fenn $\Longrightarrow$ *eseti függés*
  (ezek nem érdekelnek, például lehetséges hogy egy adott pillanatban minden ár csak egyszer szerepel és ekkor úgy tűnik, mintha Ár$\to$ Termék érvényes függés lenne)
- Tehát az érdemi függések megadása modellezési kérdés: a séma megadásakor döntjük el, hogy milyen függéseket akarunk fenntartani mindenáron.
  **Ezentúl a relációs sémának része lesz a függőségek halmaza $F$ is $\Longrightarrow (R, F)$**
  Vagyis megadjuk, hogy mik a séma attribútumai és mik az érdemi függései.

# Funkcionális függőségek

R(TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM)

TERMELŐ, TERMÉKNÉV → TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ → CÍM

# Funkcionális függőségek

R(TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM)

TERMELŐ, TERMÉKNÉV → TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ → CÍM

S(NÉV, CÍM, VÁROS, IRÁNYÍTÓSZ, TELEFON)

CÍM, VÁROS → IRÁNYÍTÓSZ
IRÁNYÍTÓSZ → VÁROS
NÉV, CÍM, VÁROS → TELEFON

## Funkcionális függőségek

R(TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM)

TERMELŐ, TERMÉKNÉV → TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ → CÍM

S(NÉV, CÍM, VÁROS, IRÁNYÍTÓSZ, TELEFON)

CÍM, VÁROS → IRÁNYÍTÓSZ
IRÁNYÍTÓSZ → VÁROS
NÉV, CÍM, VÁROS → TELEFON

- Egy adott reláció adott állapotából nem következik semmilyen érdemi függés.

## Funkcionális függőségek

R(TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM)

TERMELŐ, TERMÉKNÉV → TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ → CÍM

S(NÉV, CÍM, VÁROS, IRÁNYÍTÓSZ, TELEFON)

CÍM, VÁROS → IRÁNYÍTÓSZ
IRÁNYÍTÓSZ → VÁROS
NÉV, CÍM, VÁROS → TELEFON

- Egy adott reláció adott állapotából nem következik semmilyen érdemi függés. Viszont látszódhat olyan, hogy mi nem függhet mitől.

## Funkcionális függőségek

R(TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM)

TERMELŐ, TERMÉKNÉV → TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ → CÍM

S(NÉV, CÍM, VÁROS, IRÁNYÍTÓSZ, TELEFON)

CÍM, VÁROS → IRÁNYÍTÓSZ
IRÁNYÍTÓSZ → VÁROS
NÉV, CÍM, VÁROS → TELEFON

- Egy adott reláció adott állapotából nem következik semmilyen érdemi függés. Viszont látszódhat olyan, hogy mi nem függhet mitől.
- $X \to Y$ teljesülhet úgy is, hogy az adott relációban nincs is két olyan sor, amik $X$-en megegyeznek.

# Funkcionális függőségek

R(TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM)

TERMELŐ, TERMÉKNÉV → TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ → CÍM

S(NÉV, CÍM, VÁROS, IRÁNYÍTÓSZ, TELEFON)

CÍM, VÁROS → IRÁNYÍTÓSZ
IRÁNYÍTÓSZ → VÁROS
NÉV, CÍM, VÁROS → TELEFON

- Egy adott reláció adott állapotából nem következik semmilyen érdemi függés. Viszont látszódhat olyan, hogy mi nem függhet mitől.
- $X \to Y$ teljesülhet úgy is, hogy az adott relációban nincs is két olyan sor, amik $X$-en megegyeznek.
- $X$-nek és $Y$-nak nem kell diszjunktaknak lenniük

# Funkcionális függőségek

R(TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM)

TERMELŐ, TERMÉKNÉV → TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ → CÍM

S(NÉV, CÍM, VÁROS, IRÁNYÍTÓSZ, TELEFON)

CÍM, VÁROS → IRÁNYÍTÓSZ
IRÁNYÍTÓSZ → VÁROS
NÉV, CÍM, VÁROS → TELEFON

- Egy adott reláció adott állapotából nem következik semmilyen érdemi függés. Viszont látszódhat olyan, hogy mi nem függhet mitől.
- $X \to Y$ teljesülhet úgy is, hogy az adott relációban nincs is két olyan sor, amik $X$-en megegyeznek.
- $X$-nek és $Y$-nak nem kell diszjunktaknak lenniük

A séma megadása csak a keretet jelenti, beleértve a függeseket is, ha ezt feltöltjük adatokkal, akkor kapunk egy a sémára illeszkedő relációt.

# Funkcionális függőségek

R(TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM)

TERMELŐ, TERMÉKNÉV → TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ → CÍM

S(NÉV, CÍM, VÁROS, IRÁNYÍTÓSZ, TELEFON)

CÍM, VÁROS → IRÁNYÍTÓSZ
IRÁNYÍTÓSZ → VÁROS
NÉV, CÍM, VÁROS → TELEFON

- Egy adott reláció adott állapotából nem következik semmilyen érdemi függés. Viszont látszódhat olyan, hogy mi nem függhet mitől.
- $X \to Y$ teljesülhet úgy is, hogy az adott relációban nincs is két olyan sor, amik $X$-en megegyeznek.
- $X$-nek és $Y$-nak nem kell diszjunktaknak lenniük

A séma megadása csak a keretet jelenti, beleértve a függeseket is, ha ezt feltöltjük adatokkal, akkor kapunk egy a sémára illeszkedő relációt. A $r$ reláció akkor illeszkedik az $(R, F)$ sémára ha az attribútumai az $R$-ben adottak és teljesülnek benne az $F$ függések.

# Logikai következmény

Kérdés: ha adott egy $F$ függéshalmaz és egy reláció, amiben $F$ függései igazak, akkor milyen további függések lesznek még biztosan igazak?

# Logikai következmény

Kérdés: ha adott egy $F$ függéshalmaz és egy reláció, amiben $F$ függései igazak, akkor milyen további függések lesznek még biztosan igazak?

Például: ha HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKORLAT és GYAKORLAT → GYAKVEZ, akkor HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKVEZ.

# Logikai következmény

Kérdés: ha adott egy $F$ függéshalmaz és egy reláció, amiben $F$ függései igazak, akkor milyen további függések lesznek még biztosan igazak?

Például: ha HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKORLAT és GYAKORLAT → GYAKVEZ, akkor HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKVEZ.

Azaz általánosabban: ha $XY \rightarrow Z$ és $Z \rightarrow W$, akkor attól függetlenül, hogy mi a reláció és $X, Y, Z, W$, igaz lesz, hogy $XY \rightarrow W$.

# Logikai következmény

Kérdés: ha adott egy $F$ függéshalmaz és egy reláció, amiben $F$ függései igazak, akkor milyen további függések lesznek még biztosan igazak?

Például: ha HALLGATÓ, TÁRGY $\to$ GYAKORLAT és GYAKORLAT $\to$ GYAKVEZ, akkor HALLGATÓ, TÁRGY $\to$ GYAKVEZ.

Azaz általánosabban: ha $XY \to Z$ és $Z \to W$, akkor attól függetlenül, hogy mi a reláció és $X, Y, Z, W$, igaz lesz, hogy $XY \to W$.
**Definíció.** *Adott $(R, F)$. Az $X \to Y$ függés* ***logikai következménye*** *(szemantikai következménye) $F$-nek, ha az $X \to Y$ minden olyan $r$ relációban teljesül, ahol $F$ függései mind teljesülnek.*
*Jelölése:* $F \models X \to Y$

# Logikai következmény

Kérdés: ha adott egy $F$ függéshalmaz és egy reláció, amiben $F$ függései igazak, akkor milyen további függések lesznek még biztosan igazak?

Például: ha HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKORLAT és GYAKORLAT → GYAKVEZ, akkor HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKVEZ.

Azaz általánosabban: ha $XY \to Z$ és $Z \to W$, akkor attól függetlenül, hogy mi a reláció és $X, Y, Z, W$, igaz lesz, hogy $XY \to W$.

**Definíció.** *Adott $(R, F)$. Az $X \to Y$ függés* ***logikai következménye*** *(szemantikai következménye) $F$-nek, ha az $X \to Y$ minden olyan $r$ relációban teljesül, ahol $F$ függései mind teljesülnek.*

*Jelölése:* $F \models X \to Y$

Azaz ez a fogalom azt adja meg, hogy mely függéseknek kell szükségszerűen teljesülniük minden olyan sémában/relációban, ahol $F$ függései fennállnak.

# Logikai következmény

Kérdés: ha adott egy $F$ függéshalmaz és egy reláció, amiben $F$ függései igazak, akkor milyen további függések lesznek még biztosan igazak?

Például: ha HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKORLAT és GYAKORLAT → GYAKVEZ, akkor HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKVEZ.

Azaz általánosabban: ha $XY \rightarrow Z$ és $Z \rightarrow W$, akkor attól függetlenül, hogy mi a reláció és $X, Y, Z, W$, igaz lesz, hogy $XY \rightarrow W$.

**Definíció.** *Adott $(R, F)$. Az $X \rightarrow Y$ függés* ***logikai következménye*** *(szemantikai következménye) $F$-nek, ha az $X \rightarrow Y$ minden olyan $r$ relációban teljesül, ahol $F$ függései mind teljesülnek.*

*Jelölése:* $F \models X \rightarrow Y$

Azaz ez a fogalom azt adja meg, hogy mely függéseknek kell szükségszerűen teljesülniük minden olyan sémában/relációban, ahol $F$ függései fennállnak.

*Hogyan lehetne ezeket meghatározni, illetve eldönteni, hogy egy függés ilyen-e?*

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.

**Levezethetőség jele: $F \vdash X \to Y$**

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.
**Levezethetőség jele:** $F \vdash X \to Y$

Tehát bevezetünk axiómákat, levezethetőséget és belátjuk, hogy $\models \iff \vdash$.

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.
**Levezethetőség jele:** $F \vdash X \to Y$

Tehát bevezetünk axiómákat, levezethetőséget és belátjuk, hogy $\models \iff \vdash$.
(Pl. logikában így van.)

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.
**Levezethetőség jele:** $F \vdash X \to Y$

Tehát bevezetünk axiómákat, levezethetőséget és belátjuk, hogy $\models \iff \vdash$.
(Pl. logikában így van.)

$\models \Rightarrow \vdash$: *Teljességi tétel*, ami igaz az levezethető.

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.

**Levezethetőség jele:** $F \vdash X \to Y$

Tehát bevezetünk axiómákat, levezethetőséget és belátjuk, hogy $\models \iff \vdash$.

(Pl. logikában így van.)

$\models \Rightarrow \vdash$: *Teljességi tétel*, ami igaz az levezethető.

$\vdash \Rightarrow \models$: *Igazság tétel*, csak igaz dolgok vezethetők le.

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.
**Levezethetőség jele:** $F \vdash X \to Y$

Tehát bevezetünk axiómákat, levezethetőséget és belátjuk, hogy $\models \iff \vdash$.
(Pl. logikában így van.)

$\models \Rightarrow \vdash$: *Teljességi tétel*, ami igaz az levezethető.
$\vdash \Rightarrow \models$: *Igazság tétel*, csak igaz dolgok vezethetők le.

**Definíció.** *Egy $X \to Y$ függőség akkor vezethető le egy adott $F$ függőséghalmazból, ha az axiómák ismételt alkalmazásával $F$-ből megkapjuk $X \to Y$-t. Jele: $F \vdash X \to Y$.*

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.
**Levezethetőség jele:** $F \vdash X \to Y$

Tehát bevezetünk axiómákat, levezethetőséget és belátjuk, hogy $\models \iff \vdash$.
(Pl. logikában így van.)

$\models \Rightarrow \vdash$: *Teljességi tétel*, ami igaz az levezethető.
$\vdash \Rightarrow \models$: *Igazság tétel*, csak igaz dolgok vezethetők le.

**Definíció.** *Egy $X \to Y$ függőség akkor vezethető le egy adott $F$ függőséghalmazból, ha az axiómák ismételt alkalmazásával $F$-ből megkapjuk $X \to Y$-t. Jele: $F \vdash X \to Y$.*

## Armstrong-axiómák

1. Reflexivitás: Ha $X, Y \subseteq R$ és $Y \subseteq X$, akkor $X \to Y$.

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.

**Levezethetőség jele:** $F \vdash X \to Y$

Tehát bevezetünk axiómákat, levezethetőséget és belátjuk, hogy $\models \iff \vdash$.
(Pl. logikában így van.)

$\models \Rightarrow \vdash$: *Teljességi tétel*, ami igaz az levezethető.
$\vdash \Rightarrow \models$: *Igazság tétel*, csak igaz dolgok vezethetők le.

**Definíció.** *Egy $X \to Y$ függőség akkor vezethető le egy adott $F$ függőséghalmazból, ha az axiómák ismételt alkalmazásával $F$-ből megkapjuk $X \to Y$-t. Jele: $F \vdash X \to Y$.*

## Armstrong-axiómák

1. Reflexivitás: Ha $X, Y \subseteq R$ és $Y \subseteq X$, akkor $X \to Y$.
2. Kiegészítési tulajdonság: Ha $X, Y \subseteq R$ és $X \to Y$, akkor $XW \to YW$ igaz tetszőleges $W \subseteq R$-re.

# Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni $F$-ből, amik logikai következményei neki.
**Levezethetőség jele:** $F \vdash X \to Y$

Tehát bevezetünk axiómákat, levezethetőséget és belátjuk, hogy $\models \iff \vdash$.
(Pl. logikában így van.)

$\models \Rightarrow \vdash$: *Teljességi tétel*, ami igaz az levezethető.
$\vdash \Rightarrow \models$: *Igazság tétel*, csak igaz dolgok vezethetők le.

**Definíció.** *Egy $X \to Y$ függőség akkor vezethető le egy adott $F$ függőséghalmazból, ha az axiómák ismételt alkalmazásával $F$-ből megkapjuk $X \to Y$-t. Jele: $F \vdash X \to Y$.*

## Armstrong-axiómák

1. Reflexivitás: Ha $X, Y \subseteq R$ és $Y \subseteq X$, akkor $X \to Y$.
2. Kiegészítési tulajdonság: Ha $X, Y \subseteq R$ és $X \to Y$, akkor $XW \to YW$ igaz tetszőleges $W \subseteq R$-re.
3. Tranzitivitás: Ha $X, Y, Z \subseteq R$, $X \to Y$ és $Y \to Z$, akkor $X \to Z$.

# Igazságtétel bizonyítása

Bizonyítás: **(Igazság tétel)**

Azt kell belátni, hogy ha egy függés (esetleg több lépésben) levezethető $F$-ből a három axióma segítségével, akkor ez a függés logikai következménye is $F$-nek,

# Igazságtétel bizonyítása

Bizonyítás: **(Igazság tétel)**
Azt kell belátni, hogy ha egy függés (esetleg több lépésben) levezethető $F$-ből a három axióma segítségével, akkor ez a függés logikai következménye is $F$-nek, azaz minden olyan relációban, ahol $F$ minden függése teljesül, ott teljesül a levezetett függés is.

# Igazságtétel bizonyítása

Bizonyítás: **(Igazság tétel)**

Azt kell belátni, hogy ha egy függés (esetleg több lépésben) levezethető $F$-ből a három axióma segítségével, akkor ez a függés logikai következménye is $F$-nek, azaz minden olyan relációban, ahol $F$ minden függése teljesül, ott teljesül a levezetett függés is. Ehhez elég azt belátni, hogy külön-külön, az egyes axiómák egyszeri használata ilyen függést ad.

# Igazságtétel bizonyítása

Bizonyítás: **(Igazság tétel)**
Azt kell belátni, hogy ha egy függés (esetleg több lépésben) levezethető $F$-ből a három axióma segítségével, akkor ez a függés logikai következménye is $F$-nek, azaz minden olyan relációban, ahol $F$ minden függése teljesül, ott teljesül a levezetett függés is. Ehhez elég azt belátni, hogy külön-külön, az egyes axiómák egyszeri használata ilyen függést ad.

1. Reflexivitás: Azt kell belátni, hogy minden $r$ relációban, minden $Y \subseteq X \subseteq R$ attribútumhalmaz esetén $X \rightarrow Y$ igaz, azaz ha $r$ bármely két adott sora megegyezik $X$-en, akkor megegyeznek $Y$-on is. De mivel $Y \subseteq X$, ezért nyilván megegyeznek $Y$-on, ha $X$-en megegyeztek. √

# Igazságtétel bizonyítása

Bizonyítás: **(Igazság tétel)**
Azt kell belátni, hogy ha egy függés (esetleg több lépésben) levezethető $F$-ből a három axióma segítségével, akkor ez a függés logikai következménye is $F$-nek, azaz minden olyan relációban, ahol $F$ minden függése teljesül, ott teljesül a levezetett függés is. Ehhez elég azt belátni, hogy külön-külön, az egyes axiómák egyszeri használata ilyen függést ad.

1. Reflexivitás: Azt kell belátni, hogy minden $r$ relációban, minden $Y \subseteq X \subseteq R$ attribútumhalmaz esetén $X \rightarrow Y$ igaz, azaz ha $r$ bármely két adott sora megegyezik $X$-en, akkor megegyeznek $Y$-on is. De mivel $Y \subseteq X$, ezért nyilván megegyeznek $Y$-on, ha $X$-en megegyeztek. √
2. Kiegészítési tulajdonság: Az kell, hogy ha egy $R$-re illeszkedő $r$ relációban $X \rightarrow Y$ igaz, akkor $XW \rightarrow YW$ is igaz lesz. Vegyünk két sort $r$-ben, ami megegyezik $XW$-n. Ekkor ezek megegyeznek $X$-en és $W$-n is, külön-külön. Mivel $X \rightarrow Y$, így megegyeznek $Y$-n is, tehát $YW$-n is. √

## Igazságtétel bizonyítása

Bizonyítás: **(Igazság tétel)**
Azt kell belátni, hogy ha egy függés (esetleg több lépésben) levezethető $F$-ből a három axióma segítségével, akkor ez a függés logikai következménye is $F$-nek, azaz minden olyan relációban, ahol $F$ minden függése teljesül, ott teljesül a levezetett függés is. Ehhez elég azt belátni, hogy külön-külön, az egyes axiómák egyszeri használata ilyen függést ad.

1. Reflexivitás: Azt kell belátni, hogy minden $r$ relációban, minden $Y \subseteq X \subseteq R$ attribútumhalmaz esetén $X \to Y$ igaz, azaz ha $r$ bármely két adott sora megegyezik $X$-en, akkor megegyeznek $Y$-on is. De mivel $Y \subseteq X$, ezért nyilván megegyeznek $Y$-on, ha $X$-en megegyeztek. √
2. Kiegészítési tulajdonság: Az kell, hogy ha egy $R$-re illeszkedő $r$ relációban $X \to Y$ igaz, akkor $XW \to YW$ is igaz lesz. Vegyünk két sort $r$-ben, ami megegyezik $XW$-n. Ekkor ezek megegyeznek $X$-en és $W$-n is, külön-külön. Mivel $X \to Y$, így megegyeznek $Y$-n is, tehát $YW$-n is. √
3. Tranzitivitás: Az kell, hogy ha egy $R$-re illeszkedő $r$ relációban $X \to Y$ és $Y \to Z$ igaz, akkor $X \to Z$ is igaz lesz. Vegyünk két sort, ami megegyezik $X$-en. Mivel $X \to Y$, megegyeznek $Y$-n is. De mivel $Y \to Z$, megegyeznek $Z$-n is. √

# Példa

**Állítás.** *Ha* $R(\text{Város}, \text{Utca}, \text{Irányítószám})$ *és* $F = \{VU \to I, I \to V\}$, *akkor* $F \vdash IU \to VIU$ *(és mivel* $\vdash \Rightarrow \models$*-t már láttuk, ezért* $F \models IU \to VIU$*).*

$\surd$

# Példa

**Állítás.** *Ha $\boldsymbol{R}($Város$,$ Utca$,$ Irányítószám$)$ és $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{VU} \to \boldsymbol{I}, \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{V}\}$, akkor $\boldsymbol{F} \vdash \boldsymbol{IU} \to \boldsymbol{VIU}$*
*(és mivel $\vdash \Rightarrow \models$-t már láttuk, ezért $\boldsymbol{F} \models \boldsymbol{IU} \to \boldsymbol{VIU}$).*

$\surd$

Bizonyítás:

i) $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{V}$: ez $\boldsymbol{F}$-beli

ii) $\boldsymbol{IU} \to \boldsymbol{VU}$: kiegészítve $\boldsymbol{U}$-val

iii) $\boldsymbol{IU} \to \boldsymbol{IVU}$: kiegészítve $\boldsymbol{I}$-vel

# Levezethető szabályok

Néhány további szabály, ami levezethető az axiómákból (és az igazságtétel miatt igazak is).

# Levezethető szabályok

Néhány további szabály, ami levezethető az axiómákból (és az igazságtétel miatt igazak is).

**Állítás (Unió szabály).** $\{X \to Y,\ X \to Z\} \vdash X \to YZ$

# Levezethető szabályok

Néhány további szabály, ami levezethető az axiómákból (és az igazságtétel miatt igazak is).

**Állítás (Unió szabály).** $\{X \to Y,\ X \to Z\} \vdash X \to YZ$

Bizonyítás:

i) $X \to Y$: ez $F$-beli

ii) $XZ \to YZ$: kiegészítve $Z$-val

iii) $X \to Z$: ez $F$-beli

iv) $X \to XZ$: kiegészítve $X$-vel

v) $X \to YZ$: iv) és ii) + tranzitivitás

# Levezethető szabályok

**Állítás** (**Áltranzitiv szabály**). $\{X \to Y,\ YW \to Z\} \vdash XW \to Z$

# Levezethető szabályok

**Állítás (Áltranzitiv szabály).** $\{X \rightarrow Y,\ YW \rightarrow Z\} \vdash XW \rightarrow Z$

Bizonyítás:

i) $X \rightarrow Y$: ez $F$-beli

ii) $XW \rightarrow YW$: kiegészítve $W$-val

iii) $YW \rightarrow Z$: ez $F$-beli

iv) $XW \rightarrow Z$: ii) és iii) + tranzitivitás

# Levezethető szabályok

**Állítás** (**Áltranzitiv szabály**). $\{X \to Y,\ YW \to Z\} \vdash XW \to Z$

Bizonyítás:

i) $X \to Y$: ez $F$-beli

ii) $XW \to YW$: kiegészítve $W$-val

iii) $YW \to Z$: ez $F$-beli

iv) $XW \to Z$: ii) és iii) + tranzitivitás

**Állítás** (**Felbontási szabály**). *Tegyük fel, hogy* $Z \subseteq Y$*, ekkor* $\{X \to Y\} \vdash X \to Z$

# Levezethető szabályok

**Állítás (Áltranzitiv szabály).** $\{X \to Y,\ YW \to Z\} \vdash XW \to Z$

Bizonyítás:

i) $X \to Y$: ez $F$-beli

ii) $XW \to YW$: kiegészítve $W$-val

iii) $YW \to Z$: ez $F$-beli

iv) $XW \to Z$: ii) és iii) + tranzitivitás

**Állítás (Felbontási szabály).** *Tegyük fel, hogy* $Z \subseteq Y$*, ekkor* $\{X \to Y\} \vdash X \to Z$

Bizonyítás:

i) $X \to Y$: ez $F$-beli

ii) $Y \to Z$: reflexivitás

iii) $X \to Z$: i) és ii) + tranzitivitás

# Lezárás

**Definíció.** *Ha $F$ egy függéshalamaz, akkor a* ***lezártja*** $F^+$ *az $F$-ből levezethető összes függés:*

$$F^+ = \{X \to Y \mid F \vdash X \to Y\}$$

# Lezárás

**Definíció.** *Ha $F$ egy függéshalamaz, akkor a* ***lezártja*** $F^+$ *az $F$-ből levezethető összes függés:*

$$F^+ = \{X \to Y \mid F \vdash X \to Y\}$$

*Jó:* mert ha majd belátjuk $\models \iff \vdash$-t, akkor kiderül, hogy ez éppen az $F$-ből szükségszerűen következő összes függést adja meg.

# Lezárás

**Definíció.** *Ha $F$ egy függéshalamaz, akkor a* ***lezártja*** $F^+$ *az $F$-ből levezethető összes függés:*

$$F^+ = \{X \to Y \mid F \vdash X \to Y\}$$

*Jó:* mert ha majd belátjuk $\models \iff \vdash$-t, akkor kiderül, hogy ez éppen az $F$-ből szükségszerűen következő összes függést adja meg.

*Gond:* nagyon nagy lehet
Pl. $R(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots B_n)$ és $F = \{A_i \to B_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, akkor ez $n^2$ db függés

# Lezárás

**Definíció.** *Ha $F$ egy függéshalamaz, akkor a* ***lezártja*** $F^+$ *az $F$-ből levezethető összes függés:*

$$F^+ = \{X \to Y \mid F \vdash X \to Y\}$$

*Jó:* mert ha majd belátjuk $\models \iff \vdash$-t, akkor kiderül, hogy ez éppen az $F$-ből szükségszerűen következő összes függést adja meg.

*Gond:* nagyon nagy lehet
Pl. $R(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots B_n)$ és $F = \{A_i \to B_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, akkor ez $n^2$ db függés
$F^+$-ban benne van minden $A_{i_1} \ldots A_{i_k} \to B_{j_1} \ldots B_{j_l}$, azaz $(2^n - 1)(2^n - 1) \approx 2^{2n}$ eleme van.

# Lezárás

**Definíció.** *Ha $F$ egy függéshalamaz, akkor a* ***lezártja*** $F^+$ *az $F$-ből levezethető összes függés:*

$$F^+ = \{X \to Y \mid F \vdash X \to Y\}$$

*Jó:* mert ha majd belátjuk $\models \iff \vdash$-t, akkor kiderül, hogy ez éppen az $F$-ből szükségszerűen következő összes függést adja meg.

*Gond:* nagyon nagy lehet
Pl. $R(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots B_n)$ és $F = \{A_i \to B_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, akkor ez $n^2$ db függés
$F^+$-ban benne van minden $A_{i_1} \ldots A_{i_k} \to B_{j_1} \ldots B_{j_l}$, azaz $(2^n - 1)(2^n - 1) \approx 2^{2n}$ eleme van.

Ezért ehelyett valami mást nézünk, amit könnyebb lesz meghatározni és jól közelíti $F^+$-t:

# Lezárás

**Definíció.** *Ha $F$ egy függéshalamaz, akkor a* ***lezártja*** $F^+$ *az $F$-ből levezethető összes függés:*

$$F^+ = \{X \to Y \mid F \vdash X \to Y\}$$

*Jó:* mert ha majd belátjuk $\models \iff \vdash$-t, akkor kiderül, hogy ez éppen az $F$-ből szükségszerűen következő összes függést adja meg.

*Gond:* nagyon nagy lehet
Pl. $R(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots B_n)$ és $F = \{A_i \to B_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, akkor ez $n^2$ db függés
$F^+$-ban benne van minden $A_{i_1} \ldots A_{i_k} \to B_{j_1} \ldots B_{j_l}$, azaz $(2^n - 1)(2^n - 1) \approx 2^{2n}$ eleme van.

Ezért ehelyett valami mást nézünk, amit könnyebb lesz meghatározni és jól közelíti $F^+$-t:

**Definíció.** *Ha $X$ egy attribútum halmaz $(R, F)$-ben, akkor* ***lezártja***

$$X^+(F) = \{A \in R \mid F \vdash X \to A\},$$

*azaz azon attribútumok, amik függnek $X$-től.*

# Attribútumhalmaz lezárása

**Állítás.** $X \subseteq X^+(F) \subseteq R$

# Attribútumhalmaz lezárása

**Állítás.** $X \subseteq X^+(F) \subseteq R$

**Lemma.** *(Fontos!!!)* $F \vdash X \to Y \iff Y \subseteq X^+(F)$

# Attribútumhalmaz lezárása

**Állítás.** $X \subseteq X^{+}(F) \subseteq R$

**Lemma.** *(Fontos!!!)* $F \vdash X \rightarrow Y \iff Y \subseteq X^{+}(F)$

Bizonyítás: $\boxed{\Longrightarrow:}$ Tegyük fel, hogy $F \vdash X \rightarrow Y$ és legyen $A \in Y$.
$F \vdash X \rightarrow A$, hiszen vegyük $X \rightarrow Y$ levezetését és alkalmazzuk a felbontási szabályt a végén.
Definíció szerint ekkor $A \in X^{+}(F)$. Ez minden $A \in Y$-ra igaz. $\surd$

# Attribútumhalmaz lezárása

**Állítás.** $X \subseteq X^+(F) \subseteq R$

**Lemma.** *(Fontos!!!)* $F \vdash X \to Y \iff Y \subseteq X^+(F)$

Bizonyítás: $\boxed{\Longrightarrow:}$ Tegyük fel, hogy $F \vdash X \to Y$ és legyen $A \in Y$.
$F \vdash X \to A$, hiszen vegyük $X \to Y$ levezetését és alkalmazzuk a felbontási szabályt a végén.
Definíció szerint ekkor $A \in X^+(F)$. Ez minden $A \in Y$-ra igaz. √

$\boxed{\Longleftarrow:}$ Legyen $Y = A_1 \dots A_k \subseteq X^+(F)$.
Így definíció szerint $\forall A_i \in Y$-ra $F \vdash X \to A_i$.
Ekkor $X \to Y$ levezetése: vesszük az $A_i$-k levezetését és a végén alkalmazzuk az uniós szabályt $k - 1$-szer. √

# Attribútumhalmaz lezárása

**Állítás.** $X \subseteq X^+(F) \subseteq R$
**Lemma.** *(Fontos!!!)* $F \vdash X \rightarrow Y \iff Y \subseteq X^+(F)$

Bizonyítás: $\boxed{\Longrightarrow:}$ Tegyük fel, hogy $F \vdash X \rightarrow Y$ és legyen $A \in Y$.
$F \vdash X \rightarrow A$, hiszen vegyük $X \rightarrow Y$ levezetését és alkalmazzuk a felbontási szabályt a végén.
Definíció szerint ekkor $A \in X^+(F)$. Ez minden $A \in Y$-ra igaz. √

$\boxed{\Longleftarrow:}$ Legyen $Y = A_1 \dots A_k \subseteq X^+(F)$.
Így definíció szerint $\forall A_i \in Y$-ra $F \vdash X \rightarrow A_i$.
Ekkor $X \rightarrow Y$ levezetése: vesszük az $A_i$-k levezetését és a végén alkalmazzuk az uniós szabályt $k-1$-szer. √

Következménye: Ha minden X-re ismerjük/ki tudjuk számítani $X^+(F)$-et, akkor tetszőleges $X \rightarrow Y$ függésről eldönthető, hogy $F^+$-beli-e vagy sem,

# Attribútumhalmaz lezárása

**Állítás.** $X \subseteq X^+(F) \subseteq R$

**Lemma.** *(Fontos!!!)* $F \vdash X \rightarrow Y \iff Y \subseteq X^+(F)$

Bizonyítás: $\boxed{\Longrightarrow:}$ Tegyük fel, hogy $F \vdash X \rightarrow Y$ és legyen $A \in Y$.
$F \vdash X \rightarrow A$, hiszen vegyük $X \rightarrow Y$ levezetését és alkalmazzuk a felbontási szabályt a végén.
Definíció szerint ekkor $A \in X^+(F)$. Ez minden $A \in Y$-ra igaz. √

$\boxed{\Longleftarrow:}$ Legyen $Y = A_1 \ldots A_k \subseteq X^+(F)$.
Így definíció szerint $\forall A_i \in Y$-ra $F \vdash X \rightarrow A_i$.
Ekkor $X \rightarrow Y$ levezetése: vesszük az $A_i$-k levezetését és a végén alkalmazzuk az uniós szabályt $k - 1$-szer. √

Következménye: Ha minden X-re ismerjük/ki tudjuk számítani $X^+(F)$-et, akkor tetszőleges $X \rightarrow Y$ függésről eldönthető, hogy $F^+$-beli-e vagy sem, mert $X \rightarrow Y \in F^+$ pontosan akkor teljesül (definíció szerint), ha $F \vdash X \rightarrow Y$, de ez meg az előbbi lemma szerint pontosan akkor van, ha $Y \subseteq X^+(F)$

## Attribútumhalmaz lezárása

**Állítás.** $X \subseteq X^+(F) \subseteq R$

**Lemma.** *(Fontos!!!)* $F \vdash X \to Y \iff Y \subseteq X^+(F)$

Bizonyítás: $\boxed{\Longrightarrow:}$ Tegyük fel, hogy $F \vdash X \to Y$ és legyen $A \in Y$.
$F \vdash X \to A$, hiszen vegyük $X \to Y$ levezetését és alkalmazzuk a felbontási szabályt a végén.
Definíció szerint ekkor $A \in X^+(F)$. Ez minden $A \in Y$-ra igaz. √

$\boxed{\Longleftarrow:}$ Legyen $Y = A_1 \ldots A_k \subseteq X^+(F)$.
Így definíció szerint $\forall A_i \in Y$-ra $F \vdash X \to A_i$.
Ekkor $X \to Y$ levezetése: vesszük az $A_i$-k levezetését és a végén alkalmazzuk az uniós szabályt $k-1$-szer. √

Következménye: Ha minden X-re ismerjük/ki tudjuk számítani $X^+(F)$-et, akkor tetszőleges $X \to Y$ függésről eldönthető, hogy $F^+$-beli-e vagy sem, mert $X \to Y \in F^+$ pontosan akkor teljesül (definíció szerint), ha $F \vdash X \to Y$, de ez meg az előbbi lemma szerint pontosan akkor van, ha $Y \subseteq X^+(F)$

Megjegyzés: Majd látjuk, hogy $X^+(F)$ kiszámolására lesz gyors algoritmus.

# Teljességi tétel

**Tétel** (**Teljességi tétel**). *Ha* $F \models X \to Y$, *akkor* $F \vdash X \to Y$.

# Teljességi tétel

**Tétel** (**Teljességi tétel**). *Ha* $F \models X \to Y$, *akkor* $F \vdash X \to Y$.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $X \to Y$ függés és $F$ függéshalmaz, hogy $X \to Y$ nem vezethető le $F$-ből ($F \nvdash X \to Y$), noha logikai következménye neki ($F \models X \to Y$).

# Teljességi tétel

**Tétel (Teljességi tétel).** *Ha $F \models X \rightarrow Y$, akkor $F \vdash X \rightarrow Y$.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $X \rightarrow Y$ függés és $F$ függéshalmaz, hogy $X \rightarrow Y$ nem vezethető le $F$-ből ($F \nvdash X \rightarrow Y$), noha logikai következménye neki ($F \models X \rightarrow Y$).

Ez utóbbi azt jelenti, hogy minden olyan relációban, amiben $F$ függőségei teljesülnek, ha $X$-en megegyezik két sor, akkor azok megegyeznek $Y$-on is.

# Teljességi tétel

**Tétel** (**Teljességi tétel**). *Ha* $F \models X \to Y$, *akkor* $F \vdash X \to Y$.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $X \to Y$ függés és $F$ függéshalmaz, hogy $X \to Y$ nem vezethető le $F$-ből ($F \nvdash X \to Y$), noha logikai következménye neki ($F \models X \to Y$).

Ez utóbbi azt jelenti, hogy minden olyan relációban, amiben $F$ függőségei teljesülnek, ha $X$-en megegyezik két sor, akkor azok megegyeznek $Y$-on is.

Úgy jutunk ellentmondásra, hogy konstruálunk egy olyan $r$ relációt, ahol $F$ függőségei teljesülnek, de $X \not\to Y$, ami ellentmond $F \models X \to Y$-nak.

# Bizonyítás (folyt.)

| r | | | | | | | $X^+(F)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $X$ | | | | | | |
| | $A_1$ | ... | ... | | | | .................. | | | | ... | ... | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 .................. 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 .................. 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

# Bizonyítás (folyt.)

$X^+(F)$

$X$

| r | $A_1$ | ... | ... | | | | .................. | | | | ... | ... | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 .................. 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 .................. 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.

# Bizonyítás (folyt.)

| r | | | | | | | $X^+(F)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $X$ | | | | | | |
| | $A_1$ | … | … | | | | ................... | | | | … | … | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 ................... 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 ................... 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.

**Állítás.** *$r$-ben teljesülnek $F$ függései.*

# Bizonyítás (folyt.)

| r | | | | | | | $X^+(F)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $X$ | | | | | | |
| | $A_1$ | … | … | | | | ………………… | | | | … | … | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 ………………… 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 ………………… 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.

**Állítás.** *$r$-ben teljesülnek $F$ függései.*

Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.

Ha $U \nsubseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami $U$-n megegyezik.

# Bizonyítás (folyt.)

| $r$ | | | | | | | $X^+(F)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $X$ | | | | | | |
| | $A_1$ | … | … | | | | ................... | | | | … | … | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 ................... 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 ................... 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.

**Állítás.** *$r$-ben teljesülnek $F$ függései.*

Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.

Ha $U \not\subseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami $U$-n megegyezik.

Ha $U \subseteq X^+(F)$, akkor lemma miatt $F \vdash X \to U$.

Tranzitivitás miatt $F \vdash X \to V$. Lemma $\implies V \subseteq X^+(F)$, $V$-n megegyezik a két sor. $\surd$

# Bizonyítás (folyt.)

<table>
<tr><td>r</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="7">$X^+(F)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$X$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$A_1$</td><td>...</td><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td>...................</td><td></td><td></td><td></td><td>...</td><td>...</td><td>$A_n$</td></tr>
<tr><td>$t_1$</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1 ................... 1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$t_2$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1 ................... 1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.

**Állítás.** *$r$-ben teljesülnek $F$ függései.*

Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.

Ha $U \not\subseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami $U$-n megegyezik.

Ha $U \subseteq X^+(F)$, akkor lemma miatt $F \vdash X \to U$.

Tranzitivitás miatt $F \vdash X \to V$. Lemma $\implies V \subseteq X^+(F)$, $V$-n megegyezik a két sor. $\surd$

**Állítás.** *$r$-ben nem igaz $X \to Y$.*

# Bizonyítás (folyt.)

| r | | | | | | | $X^+(F)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $X$ | | | | | | |
| | $A_1$ | $\dots$ | $\dots$ | | | | $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ | | | | $\dots$ | $\dots$ | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.

**Állítás.** *$r$-ben teljesülnek $F$ függései.*

Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.

Ha $U \not\subseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami $U$-n megegyezik.

Ha $U \subseteq X^+(F)$, akkor lemma miatt $F \vdash X \to U$.

Tranzitivitás miatt $F \vdash X \to V$. Lemma $\implies V \subseteq X^+(F)$, $V$-n megegyezik a két sor. $\surd$

**Állítás.** *$r$-ben nem igaz $X \to Y$.*

Bizonyítás: Mivel $F \nvdash X \to Y$, ezért a fontos lemma miatt $Y \not\subseteq X^+(F)$, azaz $Y$ kilóg $X^+(F)$-ből, abból a részből, ahol a két sor egyenlő.

# Bizonyítás (folyt.)

$X^+(F)$

$X$

| r | $A_1$ | $\dots$ | $\dots$ | | | | $\dots\dots\dots\dots\dots$ | | | | $\dots$ | $\dots$ | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 .................. 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 .................. 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.

**Állítás.** *$r$-ben teljesülnek $F$ függései.*

Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.

Ha $U \not\subseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami $U$-n megegyezik.

Ha $U \subseteq X^+(F)$, akkor lemma miatt $F \vdash X \to U$.

Tranzitivitás miatt $F \vdash X \to V$. Lemma $\implies V \subseteq X^+(F)$, $V$-n megegyezik a két sor. $\surd$

**Állítás.** *$r$-ben nem igaz $X \to Y$.*

Bizonyítás: Mivel $F \nvdash X \to Y$, ezért a fontos lemma miatt $Y \not\subseteq X^+(F)$, azaz $Y$ kilóg $X^+(F)$-ből, abból a részből, ahol a két sor egyenlő.

Vagyis a két sor egyenlő $X$-en, de nem egyenlő $Y$-on, így $X \to Y$ nem igaz $r$-ben.

# Bizonyítás (folyt.)

| r | | | | | | | $X^+(F)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $X$ | | | | | | |
| | $A_1$ | … | … | | | | ………………… | | | | … | … | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 ………………… 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 ………………… 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.

**Állítás.** *$r$-ben teljesülnek $F$ függései.*

Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.
Ha $U \not\subseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami $U$-n megegyezik.

Ha $U \subseteq X^+(F)$, akkor lemma miatt $F \vdash X \to U$.
Tranzitivitás miatt $F \vdash X \to V$. Lemma $\implies V \subseteq X^+(F)$, $V$-n megegyezik a két sor. $\checkmark$

**Állítás.** *$r$-ben nem igaz $X \to Y$.*

Bizonyítás: Mivel $F \nvdash X \to Y$, ezért a fontos lemma miatt $Y \not\subseteq X^+(F)$, azaz $Y$ kilóg $X^+(F)$-ből, abból a részből, ahol a két sor egyenlő.
Vagyis a két sor egyenlő $X$-en, de nem egyenlő $Y$-on, így $X \to Y$ nem igaz $r$-ben.

Tehát $r$ tényleg olyan, hogy benne $F$ minden függése fennáll, de $X \to Y$ nem, ami bizonyítja, hogy $F \not\models X \to Y$.

# Bizonyítás (folyt.)

| r | | | | | | $\overbrace{\quad\quad\quad X^+(F) \quad\quad\quad}$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $X$ | | | | | | | |
| | $A_1$ | … | … | | | | ………………… | | | | … | … | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 ………………… 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 ………………… 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.

**Állítás.** *$r$-ben teljesülnek $F$ függései.*

Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.

Ha $U \not\subseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami $U$-n megegyezik.

Ha $U \subseteq X^+(F)$, akkor lemma miatt $F \vdash X \to U$.
Tranzitivitás miatt $F \vdash X \to V$. Lemma $\implies V \subseteq X^+(F)$, $V$-n megegyezik a két sor. √

**Állítás.** *$r$-ben nem igaz $X \to Y$.*

Bizonyítás: Mivel $F \nvdash X \to Y$, ezért a fontos lemma miatt $Y \not\subseteq X^+(F)$, azaz $Y$ kilóg $X^+(F)$-ből, abból a részből, ahol a két sor egyenlő.
Vagyis a két sor egyenlő $X$-en, de nem egyenlő $Y$-on, így $X \to Y$ nem igaz $r$-ben.

Tehát $r$ tényleg olyan, hogy benne $F$ minden függése fennáll, de $X \to Y$ nem, ami bizonyítja, hogy $F \not\models X \to Y$.

**Következmény.** *$\vdash$ és $\models$ felcserélhető.*

# Kulcs

**Definíció**. $X \subseteq R$ ***szuperkulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha* $F \vdash X \to R$. *Másképpen, ha* $R = X^+(F)$.

# Kulcs

**Definíció.** $X \subseteq R$ ***szuperkulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha* $F \vdash X \to R$. *Másképpen, ha* $R = X^+(F)$.
$X \subseteq R$ ***kulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha szuperkulcs és nincs olyan valódi részhalmaza, ami szuperkulcs.*

# Kulcs

**Definíció.** $X \subseteq R$ ***szuperkulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha* $F \vdash X \to R$*. Másképpen, ha* $R = X^+(F)$.
$X \subseteq R$ ***kulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha szuperkulcs és nincs olyan valódi részhalmaza, ami szuperkulcs.*

*Példa:*
$F = \{$TERMELŐ, TERMÉKNÉV $\to$ ÁR; TERMELŐ $\to$ CÍM$\}$
$X =$ TERMELŐ, TERMÉKNÉV

# Kulcs

**Definíció.** $X \subseteq R$ ***szuperkulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha* $F \vdash X \to R$. *Másképpen, ha* $R = X^+(F)$.

$X \subseteq R$ ***kulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha szuperkulcs és nincs olyan valódi részhalmaza, ami szuperkulcs.*

*Példa:*

$F = \{$TERMELŐ, TERMÉKNÉV $\to$ ÁR; TERMELŐ $\to$ CÍM$\}$

$X =$ TERMELŐ, TERMÉKNÉV

$\Longrightarrow$ $X^+(F) =$ TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM

# Kulcs

**Definíció.** $X \subseteq R$ ***szuperkulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha* $F \vdash X \to R$. *Másképpen, ha* $R = X^+(F)$.
$X \subseteq R$ ***kulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha szuperkulcs és nincs olyan valódi részhalmaza, ami szuperkulcs.*

*Példa:*
$F = \{$TERMELŐ, TERMÉKNÉV $\to$ ÁR; TERMELŐ $\to$ CÍM$\}$
$X =$ TERMELŐ, TERMÉKNÉV
$\Longrightarrow$ $X^+(F) =$ TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ$^+(F) =$ TERMELŐ, CÍM
TERMÉKNÉV$^+(F) =$ TERMÉKNÉV

# Kulcs

**Definíció.** $X \subseteq R$ ***szuperkulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha* $F \vdash X \to R$. *Másképpen, ha* $R = X^+(F)$.
$X \subseteq R$ ***kulcsa*** *az* $(R, F)$ *sémának, ha szuperkulcs és nincs olyan valódi részhalmaza, ami szuperkulcs.*

*Példa:*
$F = \{$TERMELŐ, TERMÉKNÉV $\to$ ÁR$;$ TERMELŐ $\to$ CÍM$\}$
$X =$ TERMELŐ, TERMÉKNÉV
$\Longrightarrow$ $X^+(F) =$ TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ$^+(F) =$ TERMELŐ, CÍM
TERMÉKNÉV$^+(F) =$ TERMÉKNÉV
$\Longrightarrow$ $X$ kulcs

# $X^+(F)$ kiszámítása

**Algoritmus:**

$X_0 = X$,

$\vdots$

$X_i = \ldots$,

# $X^+(F)$ kiszámítása

**Algoritmus:**

$X_0 = X$,

$\vdots$

$X_i = \ldots,$

$X_{i+1} = X_i \cup \{A \in R \mid$ van olyan $U \rightarrow V \in F$, hogy $U \subseteq X_i$ és $A \in V\}$

# $X^+(F)$ kiszámítása

**Algoritmus:**

$X_0 = X$,

$\vdots$

$X_i = \ldots,$

$X_{i+1} = X_i \cup \{A \in R \mid$ van olyan $U \to V \in F$, hogy $U \subseteq X_i$ és $A \in V\}$,

$\vdots$

$X^+(F) = X_{\text{utolsó}}$, (amikor már nem nő)

# $X^+(F)$ kiszámítása

**Algoritmus:**

$X_0 = X$,

$\vdots$

$X_i = \ldots,$

$X_{i+1} = X_i \cup \{A \in R \mid$ van olyan $U \to V \in F$, hogy $U \subseteq X_i$ és $A \in V\}$,

$\vdots$

$X^+(F) = X_{\text{utolsó}}$, (amikor már nem nő)